Matemática

Material Gratuito para FUVEST

Professor Marçal

Sumário

Apresentação

Olá, pessoal!

Com satisfação, começamos aqui nosso curso preparatório para o vestibular da Fundação Universitária para o Vestibular, também conhecida como Fuvest.

Meu nome é Marçal, graduado em Matemática pela UFSJ (Universidade Federal de São João del Rei) e professor em cursos pré-vestibulares desde 1999. Como tutor, orientei dezenas de estudantes ao longo do espinhoso caminho até a aprovação em exames vestibulares de alto desempenho como Fuvest, Unesp, Unicamp, AFA, entre outros. Ao longo da vida, com satisfação, elegi a Matemática como ferramenta pessoal para construção do conhecimento.

Minha missão aqui é dar a você todos os recursos e condições de aprovação em um dos vestibulares mais procurados do país, o vestibular da Fuvest.

Como costumo dizer aos meus alunos, aproveite ao máximo o curso e tenha em mente que nada se conquista sem esforço. Se por um lado estamos oferecendo a você um material de altíssima qualidade, por outro você terá que se preparar para muitas e muitas horas de trabalho duro. Não negligencie o seu desenvolvimento.

Metodologia do curso

Nossas aulas abrangerão todo o conteúdo cobrado nas provas, de forma ampla, com centenas de exercícios resolvidos para que você possa construir seu conhecimento a cada passo, em cada detalhe.

E a Matemática é cheia deles, os detalhes, não é mesmo?

Nosso curso é composto por PDFs, com teoria e exercícios, e videoaulas.

A parte teórica é completa, porém objetiva. O material é inteiramente focado no vestibular da Fuvest e traz uma análise de todos os assuntos cobrados nos últimos vinte anos, pelo menos. Essa prova tem se mantido muito fiel às suas características e tem um perfil de aluno muito definido a selecionar. Assim, mesmo questões mais antigas cumprem muito bem seu papel na preparação.

Nesta aula, para que não fique uma brecha sequer em sua preparação, você terá acesso a exercícios sobre a base matemática de funções cobradas nos últimos anos.

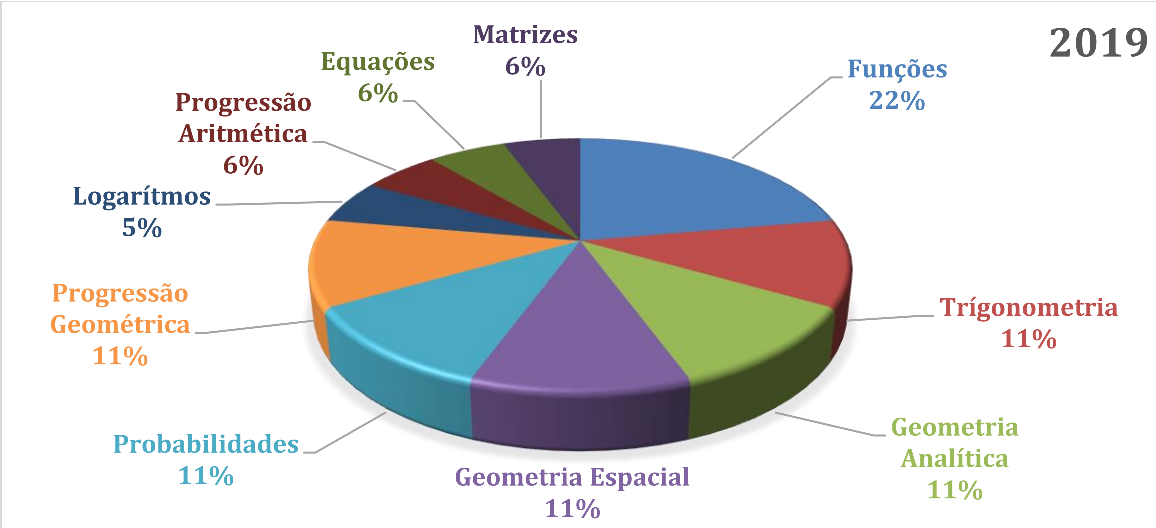
Desse modo, não será necessário que você procure materiais de diversas fontes como complemento, economizando, além de dinheiro, um tempo precioso a ser utilizado efetivamente na sua preparação.

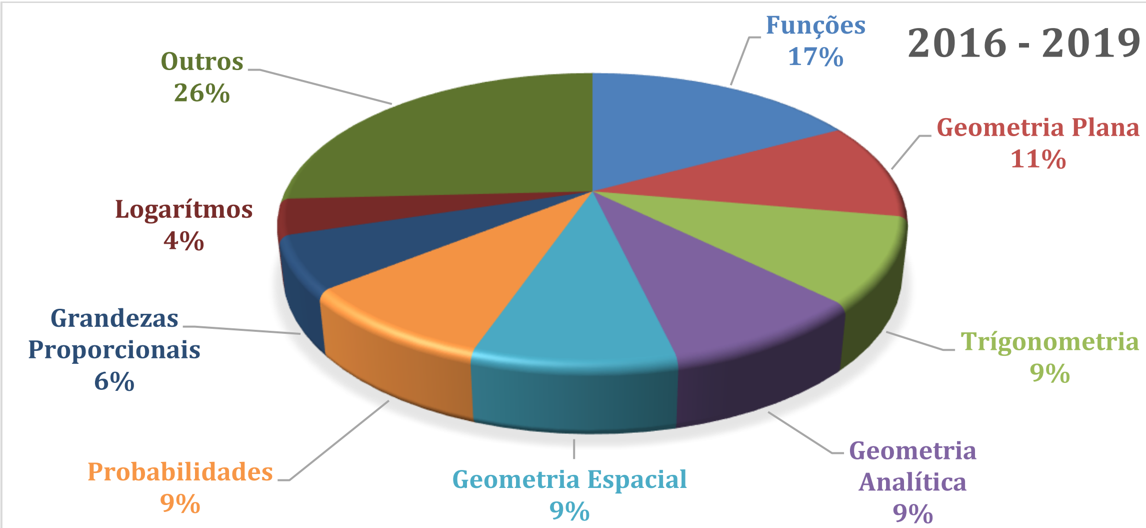
Neste curso, utilizaremos questões do vestibular da Fuvest, na maior quantidade possível, questões inéditas e questões de outras bancas, quando pertinentes ao momento de seu aprendizado.

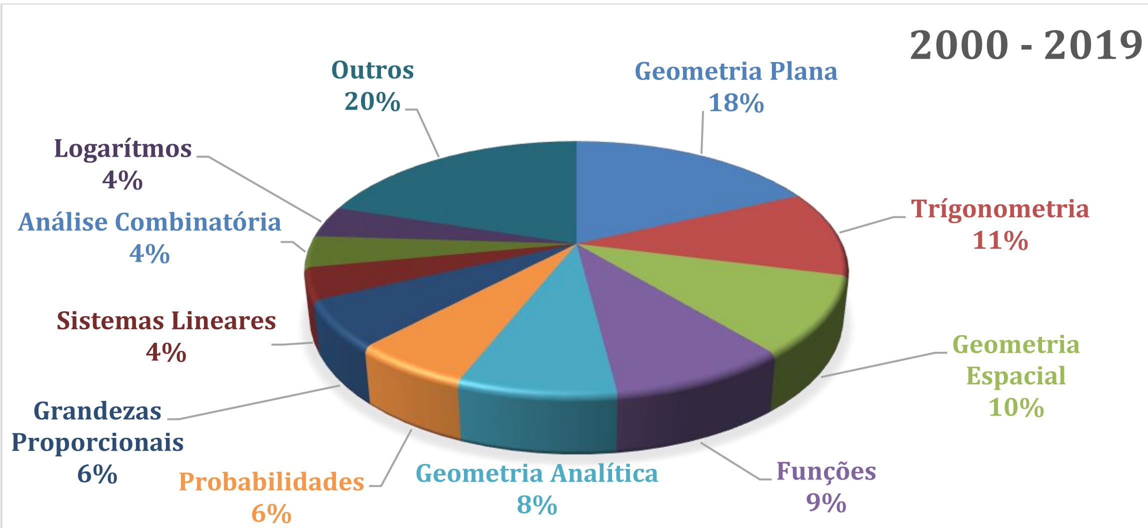
Ao final do curso, com literalmente centenas de exercícios em sua experiência, você terá todas as condições para fazer uma excelente prova e alcançar sua almejada aprovação.

Sobre a Fuvest

Para começar, vejamos a distribuição dos assuntos nas provas da Fuvest do ano 2000 até hoje:







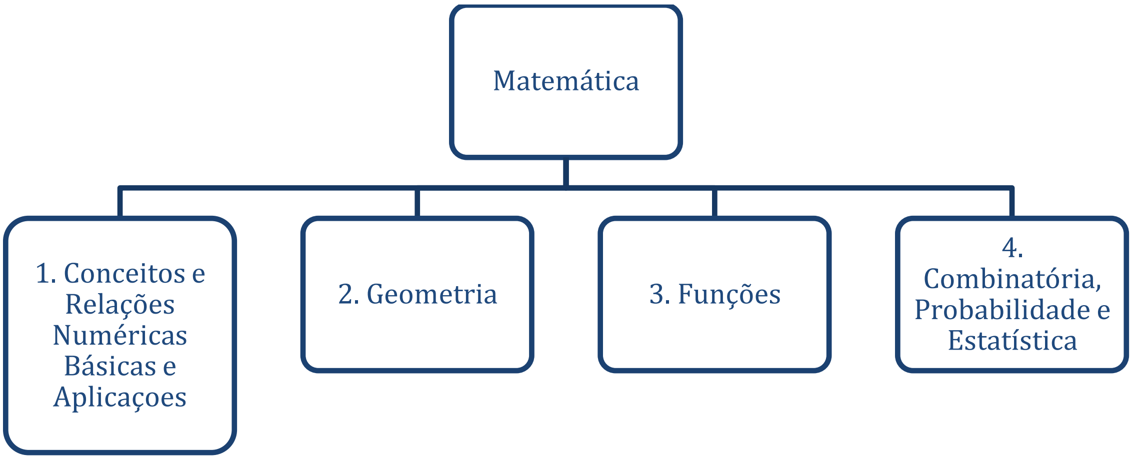
Podemos perceber que, ao longo dos anos, o vestibular mantém uma linha muito coerente com a distribuição dos tópicos de matemática, o que torna o estudo das provas anteriores uma estratégia muito interessante para a sua aprovação.

Em todas as análises, se somarmos a participação das Funções, Trigonometria e Geometrias, temos mais de 50% da prova, de modo sistemático e consistente.

Atenção, não defendo que você estude apenas os temas mais cobrados, mas, sem dúvida, eles não podem ser negligenciados. Você deve dominá-los com alguma proficiência para ser competitivo no processo seletivo.

Estudaremos os temas na ordem didática e, durante todo o curso, veremos temas importantes para a sua prova.

No Manual do Aluno do vestibular de 2019, que você pode e deve conferir na íntegra aqui[1], a Fuvest dividiu a Matemática em quatro áreas:



E, para cada área, uma indicação de como podem ser pedidas na prova.

A princípio, essa divisão pode parecer um pouco confusa, então vejamos como ficam esses tópicos dentro da árvore da matemática para cada área que a Fuvest separou.

Diagramas do conteúdo programático

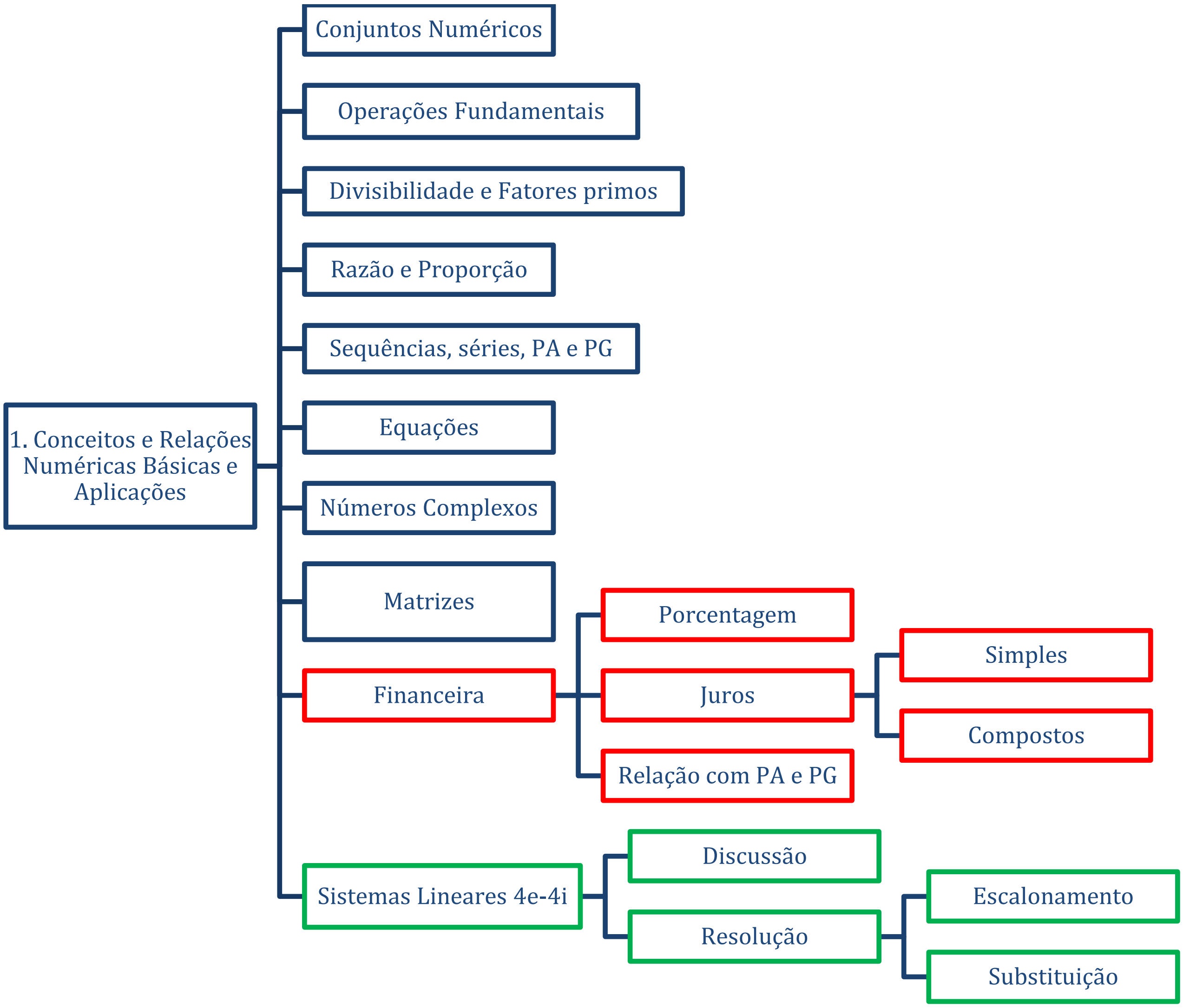
ESCLARECENDO

Os diagramas a serem apresentados são um guia para nossa divisão de aulas. No entanto, boa parte de nosso conteúdo é interdependente, ou seja, precisaremos resgatar conceitos, expandi-los e modificar suas aplicações em, praticamente, todo o curso.

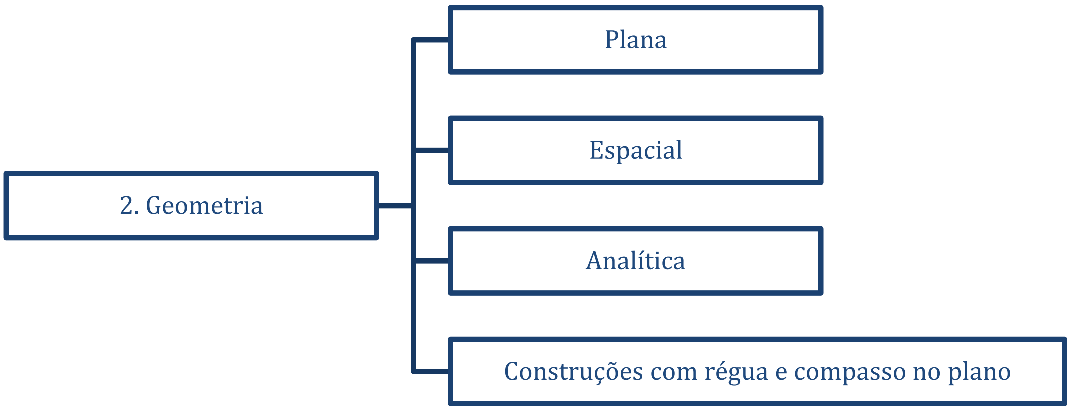
Portanto, ao encerrarmos um assunto da árvore, não significa que não o retomaremos, ok?

[1] Manual do aluno Fuvest 2019:
https://www.fuvest.br/wp-content/uploads/fuvest.2019.manual.candidato.pdf

Conceitos e Relações Numéricas Básicas e Aplicações



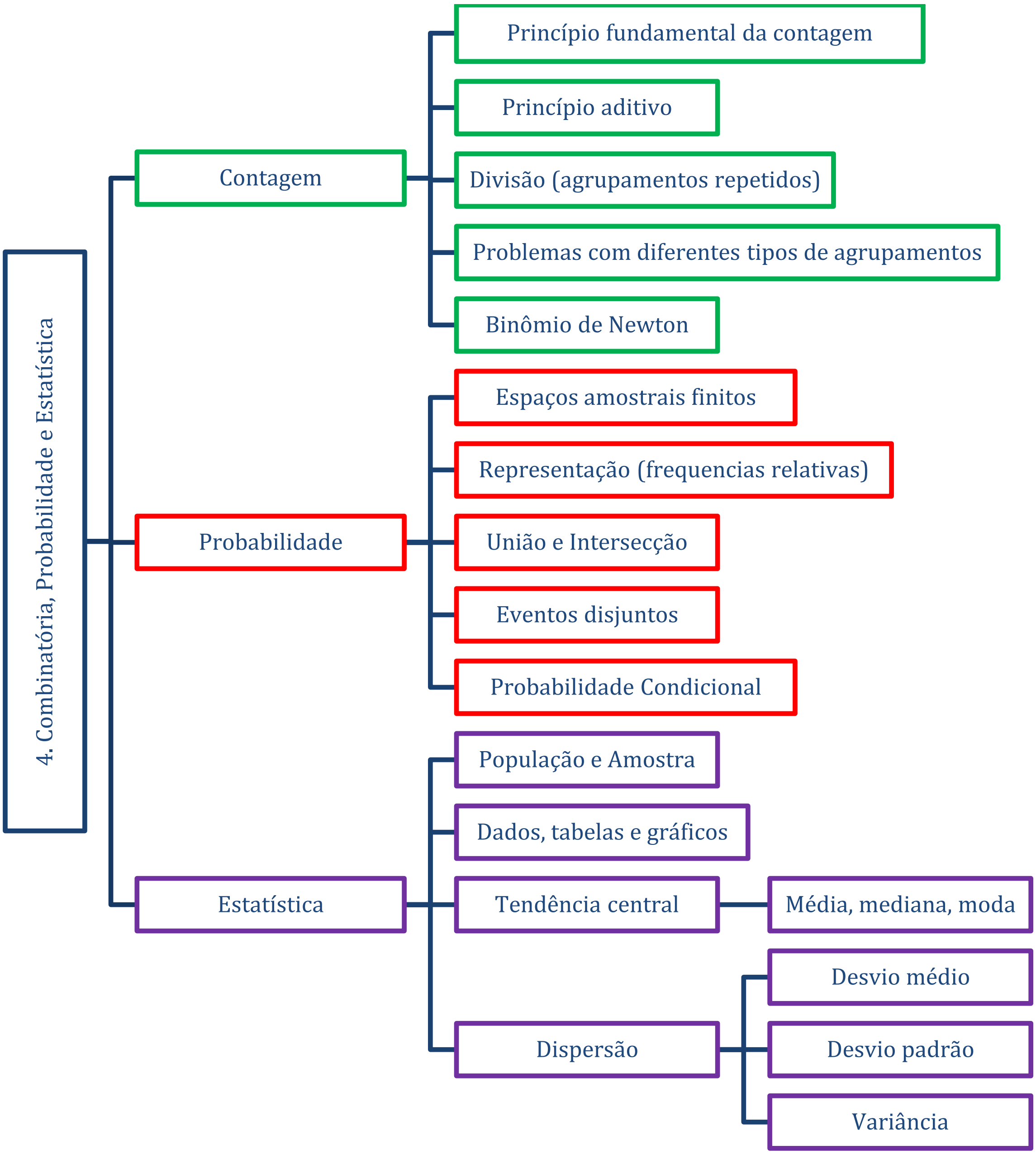
Geometria



Funções

- 3. Funções
  - Representação algébrica e gráfica
    - Módulo, polinomial 1o e 2o graus, $f(x)=x^n$, $f(x)=1/x$ e $f(x)=1/x^2$
    - exponenciais e logarítimicas
      - ≅ para expoentes irracionais
    - sen, cos, tg
      - arcos notáveis e suas transladadas
  - Reconhecimento e Interpretação de gráficos
    - Domínio e Imagem
    - Máximos, mínimos e zeros
    - biunivocidade
    - Periodicidade
    - Simetrias
    - Intervalos de crescimento e de decrescimento
    - Análise de variação da função
    - Situações Problema
      - Estimativas
      - Previsão de valores
  - Equações e Inequações envolvendo funções
    - Resolução
      - Gráfica
      - Algébrica
    - Identidades funcionais
      - Princípio de identidade polinomial
      - Produtos notáveis e fatoração de polinômios
      - Identidades trigonométricas
      - Propriedades básicas
        - Logarítmos
        - Exponenciais
      - Desigualdade triangular para módulos

Combinatória, Probabilidade e Estatística



Essas indicações estão todas em nosso cronograma, de modo que cobriremos completamente o conteúdo programático ao longo do curso.

Vamos começar?

Introdução

A aula de hoje versa sobre um assunto importantíssimo e que cai em toda prova de vestibular que contenha a disciplina matemática: as funções.

Pois é, você não encontrará um vestibular cuja prova de matemática não contenha algo que derive dos fundamentos desta aula.

Hoje teremos uma introdução à função e estudaremos seus fundamentos, o plano cartesiano e algumas funções especiais. Veremos funções por, praticamente, todo o nosso curso. Esta e as próximas aulas têm o intuito de fundamentar o nosso conhecimento acerca do assunto para conseguirmos avançar em tópicos como geometria, progressões, análise combinatória, entre outros.

Ah, e não se esqueça: se surgir aquela dúvida, poste-a no fórum. Não deixe brechas em seu conhecimento, combinado?

FALE COMIGO

/professormarcal /professor.marcal /professormarcal

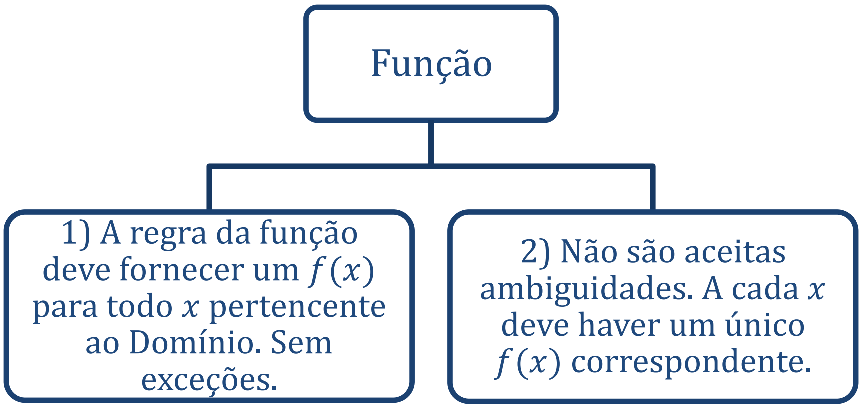
1. Funções

1.1. Definição, domínio e contradomínio

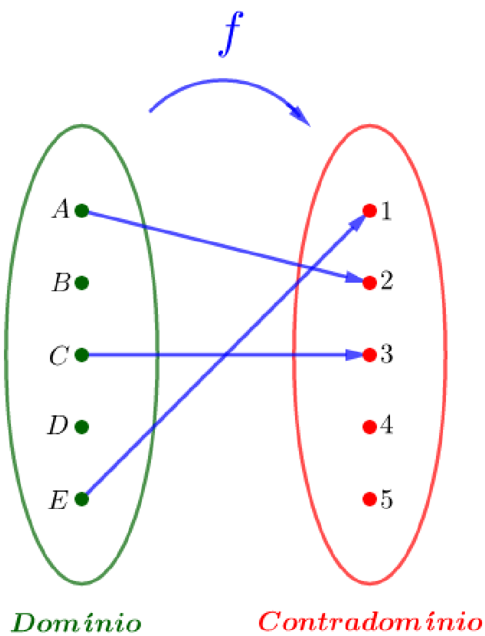
Já vimos uma noção intuitiva de função na aula passada, agora vamos formalizar essa visão.

Tecnicamente, uma função é uma regra que associa elementos de um conjunto "de partida", chamado Domínio, a elementos de um conjunto "de chegada", chamado Contradomínio.

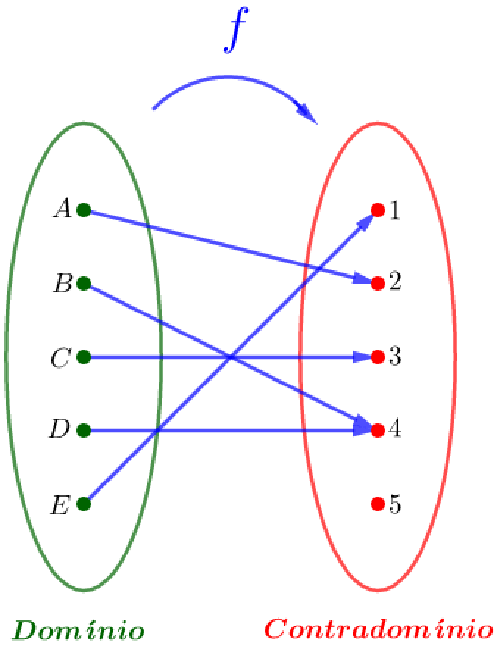
Para que tenhamos realmente uma função, apenas duas regras básicas devem ser seguidas:



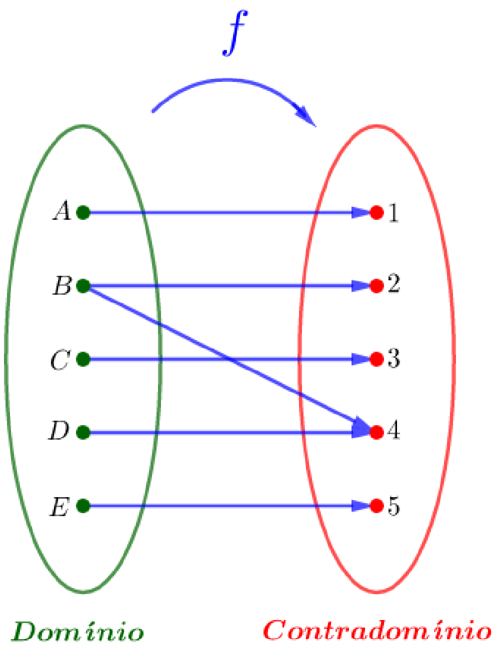
Analisemos alguns diagramas para verificar se as relações entre os conjuntos apresentados são ou não uma função.



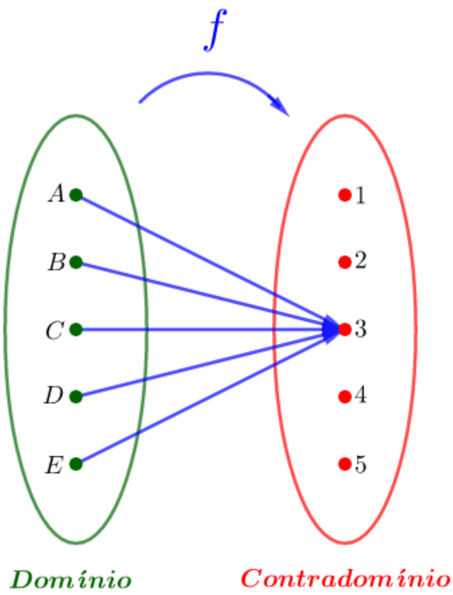
O diagrama anterior não representa uma função, pois não satisfaz a condição 1) enunciada acima, a de fornecer um $f(x)$ para todo x pertencente ao Domínio. Perceba que os elementos B e D do domínio ficaram sem correspondentes no Contradomínio.



Essa já é uma função. Perceba que ambas as condições, 1) e 2), foram satisfeitas. Todos os elementos do Domínio têm correspondentes no Contradomínio e cada elemento do Domínio tem apenas um correspondente no Contradomínio.



Aqui já não temos uma função, pois não satisfaz a condição 2), a de não haver ambiguidades. Perceba que o elemento B, do Domínio, está relacionado a dois elementos do Contradomínio e isso não é permitido para funções.



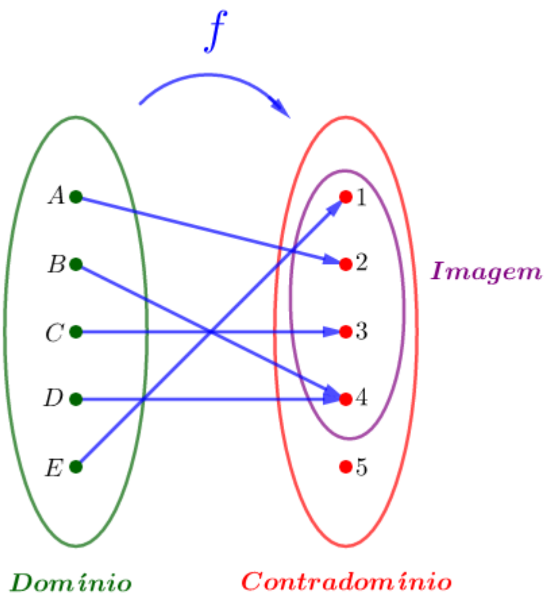
Essa é uma função. Não há problema em ficarem elementos do contradomínio sem referentes. Não podemos ter elementos sem correspondentes no domínio apenas.

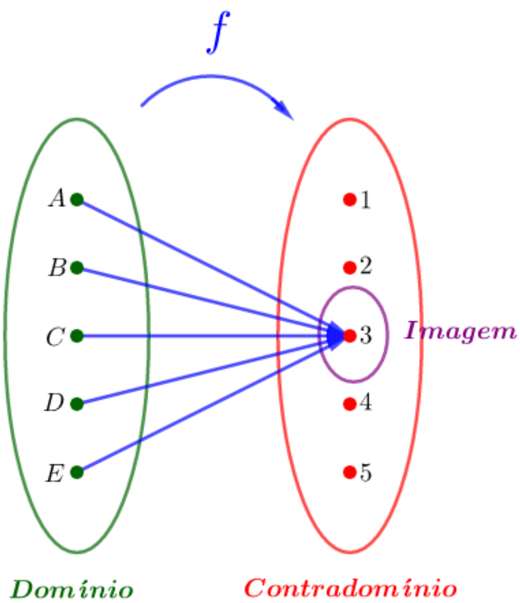
1.2. Imagem

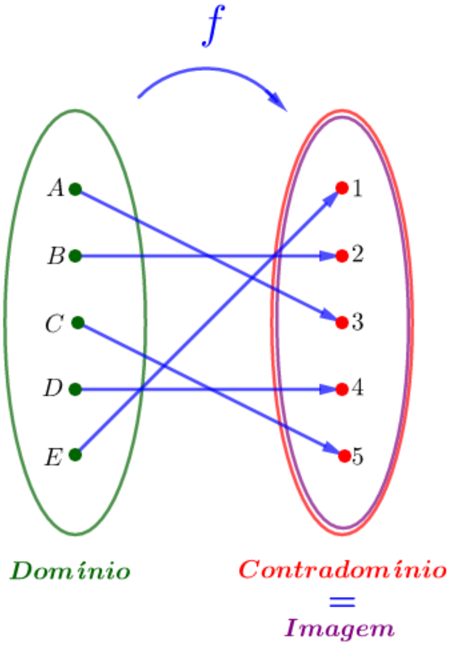
O conjunto Imagem de uma função, também chamado de conjunto dos valores de f, é o subconjunto do contradomínio que contém somente os elementos relacionados a elementos do domínio.

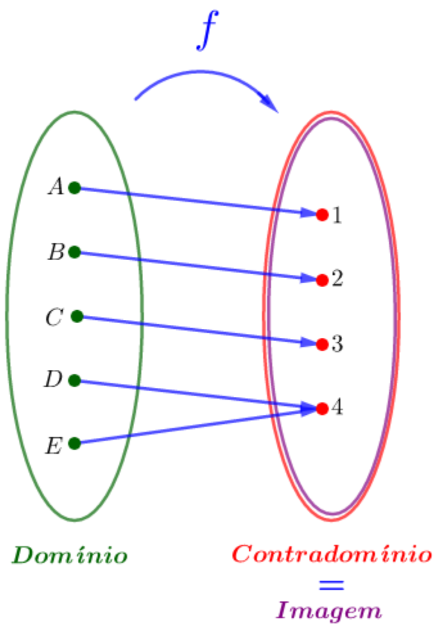
Professor “ducéu”, entendi nada!

Calma, vejamos como são as imagens de algumas funções nos diagramas.







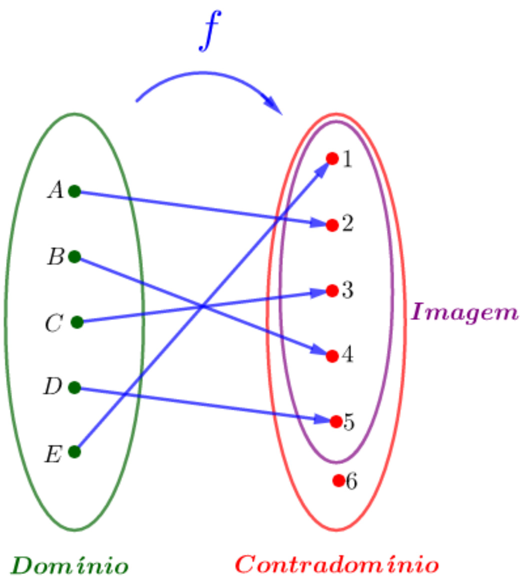


1.3. Função injetiva, sobrejetiva e bijetiva

Com base no comportamento da função com os conjuntos domínio, contradomínio e imagem, podemos classificar as funções em injetoras, sobrejetora e bijetoras. Vejamos o que significa cada um desses termos.

Uma função é chamada injetiva, ou biunívoca, quando não há elementos da imagem relacionados a mais de um elemento do domínio. Nesse tipo de função, as relações não se sobrepõem ou, em linguagem popular, não "encavalam".

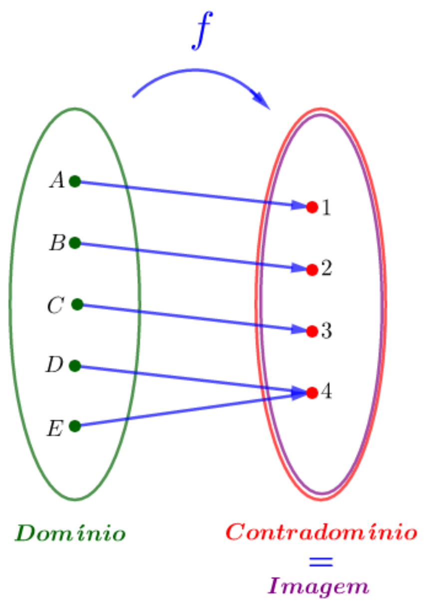
Veja um exemplo de função injetiva:



Pode-se dizer que, para uma função injetiva, se $f(x) = f(y) \rightarrow x = y$.

Para uma função ser sobrejetiva, a condição é a de que todos os elementos do contradomínio recebam correspondência de pelo menos um elemento do domínio.

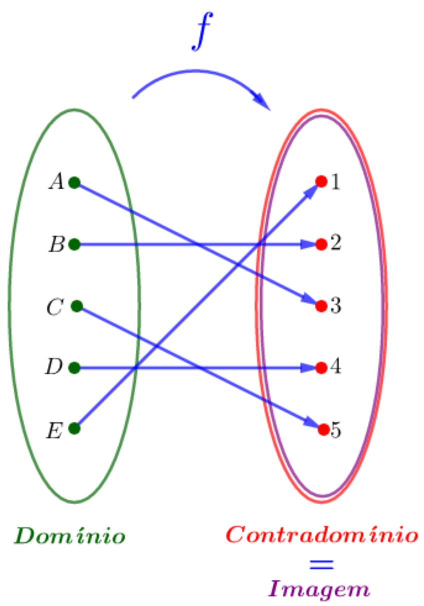
O diagrama a seguir representa exatamente essa situação para uma função sobrejetiva.



Podemos pensar que, para uma função ser sobrejetiva, basta que o contradomínio seja igual à imagem, não importando se há a sobreposição ou não.

Passando à próxima classificação, uma função é bijetiva quando tem as características de ambas as classificações anteriores, ou seja, é bijetiva quando é injetiva e sobrejetiva simultaneamente.

Para isso, ela não deve apresentar sobreposição para ser injetiva e ter o conjunto domínio idêntico ao conjunto imagem, como no diagrama a seguir:



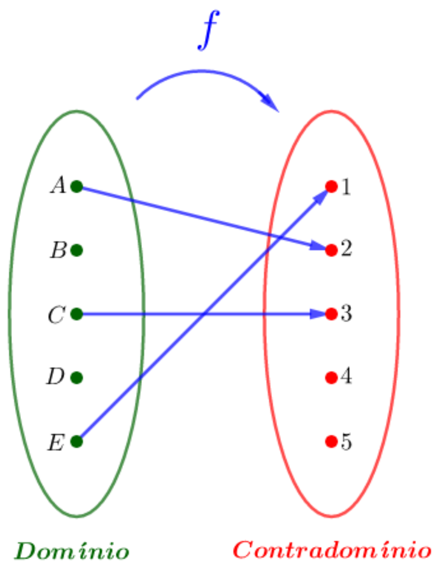
Professor, então alterando esses conjuntos, domínio, contradomínio e imagem, é possível mudar a classificação de uma função?

Excelente pergunta!

A resposta é um sonoro SIM.

E é exatamente isso que fazemos nos exercícios cujo comando da questão traz algo como "defina o domínio da função tal".

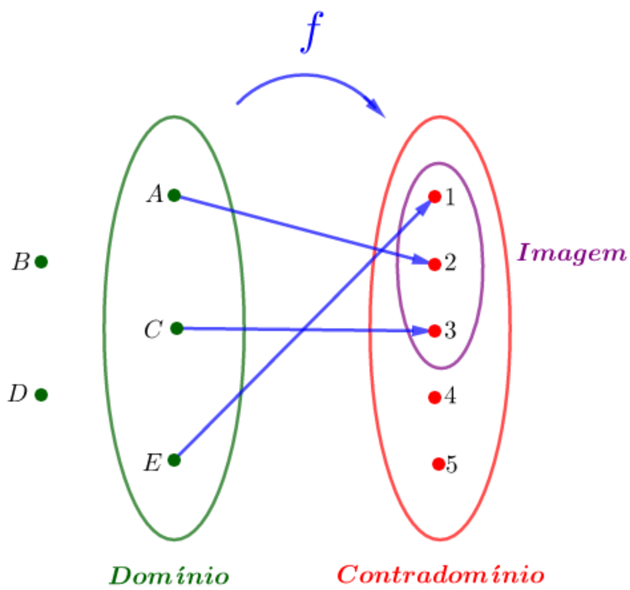
Vamos analisar nosso primeiro diagrama usado como exemplo nessa aula



Com esse diagrama, defina o domínio de modo que f seja uma função.

Ora, professor, é só retirarmos os elementos B e D do conjunto domínio.

Exatamente isso. Desse modo, passamos a ter uma função.

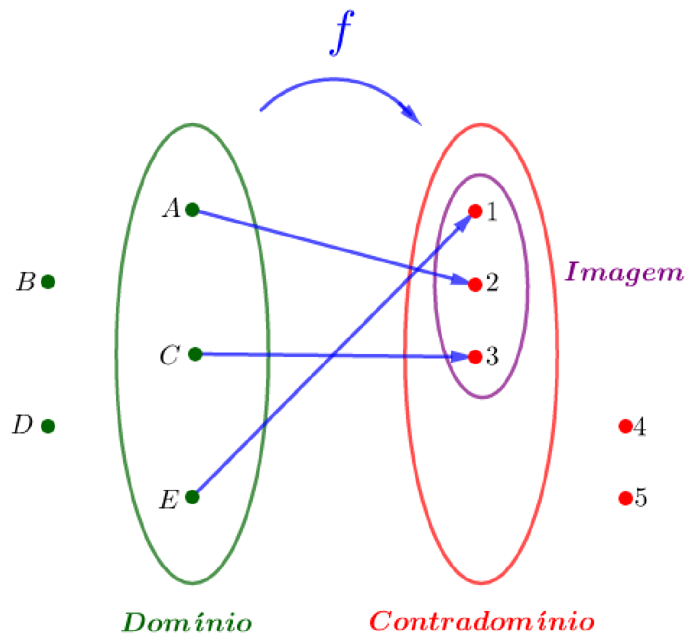


Essa função passou a ser, então, injetiva e não sobrejetiva, visto que o contradomínio não é igual à imagem.

Poderíamos alterar, então, o conjunto contradomínio para que a função seja bijetiva?

Sem problemas.

Ao alterar o contradomínio convenientemente, teremos uma função bijetiva como em:



Veja que não há sobreposição em elemento algum do contradomínio e este é igual ao conjunto imagem, classificando nossa função como bijetiva (injetiva + sobrejetiva).

Professor, essa classificação das funções em injetivas, sobrejetivas e bijetivas são aplicáveis às funções nos gráficos?

São sim.

Na verdade, podemos expressar a ideia de função de várias maneiras diferentes. Os diagramas que usamos são um dos jeitos possíveis.

Podemos expressar uma função por meio de tabelas, diagramas, gráficos dos mais variados tipos e até por meio de uma função algébrica, está lembrado?

Em nosso curso, daremos ênfase a dois desses tipos: os gráficos no plano cartesiano e as funções expressas algebricamente.

Vamos começar estudando as funções de primeiro e de segundo grau, algebricamente e graficamente, e, após sabermos como relacionar essas duas funções aos seus gráficos, voltaremos a essa classificação, combinado?

1.4. Plano cartesiano

O plano cartesiano é como uma tela onde cada ponto tem seu endereço.

Para chegar a um ponto qualquer dessa tela, deslocamo-nos a partir da origem primeiro na horizontal (direita ou esquerda) e, depois, na vertical (para cima ou para baixo).

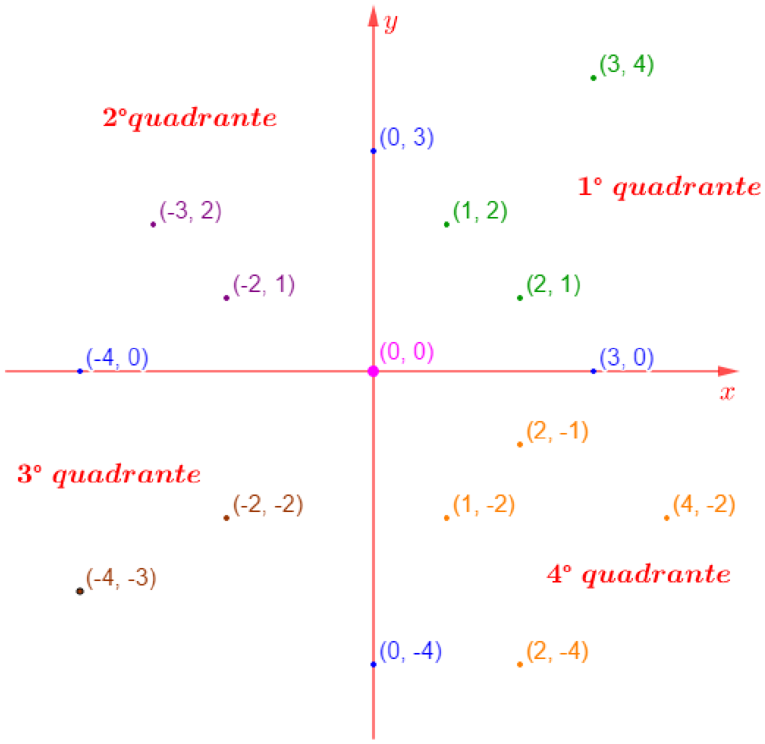
Para simbolizar esse "deslocamento", escreveremos os endereços sempre nesta ordem: horizontal e vertical. Por isso chamamos esses endereços de coordenadas dos pontos de pares ordenados. Chamaremos, de agora em diante, as coordenadas horizontais de abscissas e as coordenadas verticais de ordenadas.

Embora possamos utilizar quaisquer símbolos para, algebricamente, representar um par ordenado, há grande preferência para as letras x e y para representar as abscissas e as ordenadas, respectivamente.

Desse modo, $(2; 3)$ indica um ponto a duas unidades de distância horizontal e três de distância vertical a partir da origem de um plano cartesiano, enquanto $(x; y)$ é uma representação para um par ordenado genérico.

Quando não causar confusão com números decimais não inteiros, podemos representar pares ordenados separados por vírgula, ao invés de ponto e vírgula, (x, y), sem prejuízo para a clareza e correção da notação.

Vejamos com o representar essas coordenadas no plano cartesiano. Perceba que os eixos dividem o plano em quatro regiões, chamadas quadrantes.



ATENÇÃO!!

Alguns detalhes que gostaria que você notasse e os observasse sempre que vir um plano cartesiano a partir de agora:

- Números positivos e negativos, nos eixos, são divididos pelo ponto $(0,0)$.

- As setas, rigorosamente expressas em apenas uma das extremidades de cada eixo, indicam o sentido de crescimento dos números e não, não podem ser colocadas em ambas as extremidades, ok?

- Os números que estão exatamente em cima de um eixo coordenado sempre têm uma das coordenadas igual a zero. Se o ponto está no eixo x, tem a coordenada $y = 0$. Se o ponto está no eixo y, tem sua coordenada $x = 0$. Essa característica será muito útil em toda a nossa jornada na matemática!

Agora que já sabemos o que é um plano cartesiano, vamos relacioná-lo às funções algébricas.

1.5. Funções de primeiro grau

As funções de primeiro grau são funções do tipo

$$y = ax + b$$

Algumas características merecem destaque quando falamos sobre equações do primeiro grau, vamos a elas.

Há, na escrita da função, os coeficientes a e b.

Atenção, eles não são variáveis, mas coeficientes.

E qual será o papel deles quando esboçamos o gráfico de equações de primeiro grau?

O que faremos aqui não é uma “prova” matemática. Os gráficos que serão apresentados têm a função de explicitar comportamentos conhecidos das funções de primeiro grau a título de apresentação. Em pontos diferentes do curso veremos algumas provas do que será introduzido intuitivamente nos próximos passos.

Feitas as considerações, façamos alguns gráficos para análise.

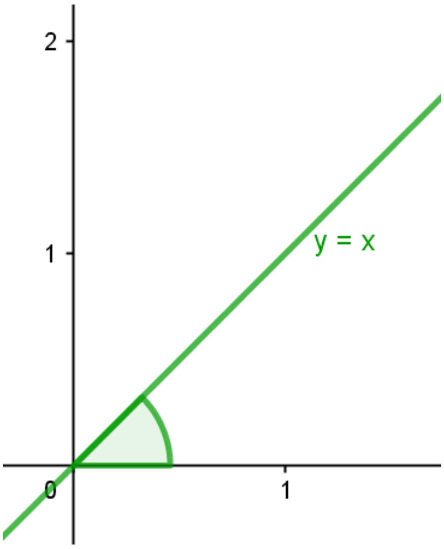
Para padronizar, levaremos em consideração a função

$$y = 1x + 0$$

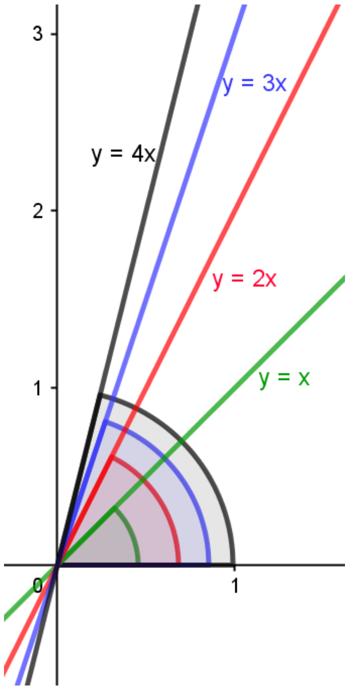
$$y = x$$

Também conhecida por função afim.

Vejamos seu gráfico.



Alterando os valores do coeficiente a de 1 para $2, 3\ e\ 4$.



Você deve ter notado que, aparentemente, todas as funções parecem ser retas. Conversaremos sobre isso mais à frente.

Sobre o coeficiente a, percebeu que quando o aumentamos, também aumenta o ângulo entre a reta y e o eixo x?

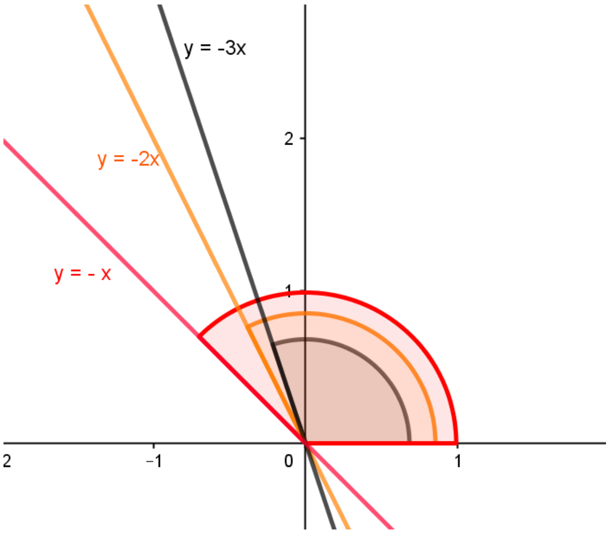
Além disso, todas se interceptam no ponto $(x; y) = (0; 0)$, o que era de se esperar. Como as funções são todas do tipo

$$y = ax$$

quando

$$x = 0\ \rightarrow y = a.0 = 0.$$

E o que será que acontece quando colocamos um número negativo no lugar do coeficiente a?



Todas as retas apresentam ângulo maior que 90^ocom o eixo x.

Podemos perceber alguns comportamentos da função referentes ao coeficiente a:

Quanto maior o valor do módulo de a, mais vertical a reta.

Coeficientes positivos geram retas crescentes.

Coeficientes negativos geram retas decrescentes.

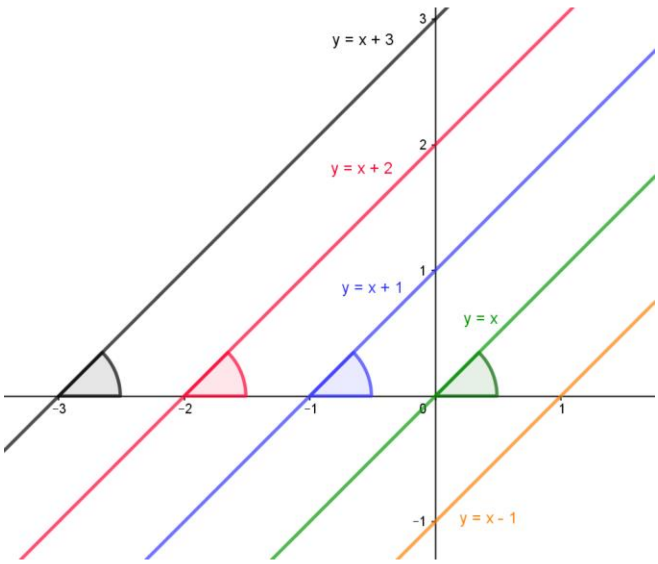
Todas as retas da forma $y = ax$ cruzam a origem do plano cartesiano $(0; 0)$.

Está evidente a importância do coeficiente a para o ângulo entre a reta $y = ax$ e o eixo x. Essa característica levou à designação do coeficiente a como coeficiente angular. Na aula sobre trigonometria, veremos em detalhes como esse coeficiente representa a tangente do ângulo entre a reta e o eixo x.

Entendido o papel do coeficiente angular a para a função de primeiro grau, passemos ao estudo do coeficiente b.

Para padronização, utilizaremos a mesma função: $y = 1x + 0 \Rightarrow y = x$.

Como fizemos com o coeficiente angular, alteremos o valor do coeficiente b de 0 para $1, 2\ e\ 3$.



Que figura curiosa.

Note que todas as retas apresentam o mesmo ângulo com o eixo x, das abcissas. Afinal, se o coeficiente angular de todas essas retas é o mesmo, $a = 1$, não poderíamos esperar diferente, não é mesmo?

Já a mudança do coeficiente b causou um deslocamento do ponto de intersecção da reta com o eixo y. Antes, todas as retas tocavam o eixo das ordenadas na origem. Ao alterar o coeficiente b, o ponto de intersecção não só foi alterado, como apresenta o mesmo valor numérico do coeficiente.

Vejamos essa característica algebricamente.

O ponto onde a reta corta o eixo y tem sempre coordenada $(0; y)$. Sendo assim, funções do tipo

$$y = ax + b$$

ao interceptarem o eixo das ordenadas, sempre em um ponto $(0; y)$, ou seja, $x = 0$, apresentará valor calculado no ponto por:

$$y = 0x + b$$

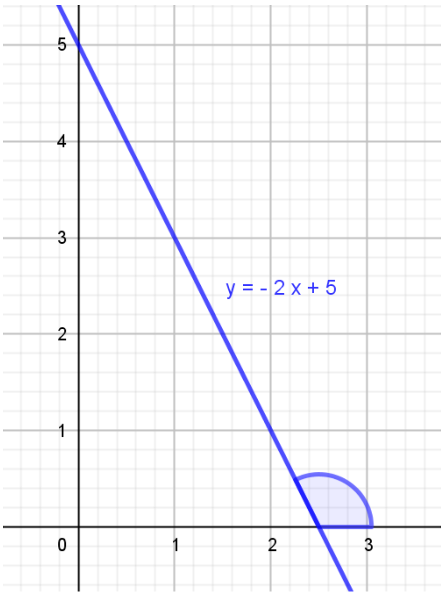
$$y = b$$

Essa relação entre o ponto de intersecção entre a reta e o eixo y, também chamado de intercepto-y, dá origem ao nome ao coeficiente b de coeficiente linear; o valor onde a reta "corta" a linha do eixo vertical.

Com esses dados acerca dos coeficientes angular e linear, já somos capazes de esboçar o gráfico das funções de primeiro grau apenas olhando para a e b.

Testemos nossas habilidades. Como seria o gráfico de, digamos, $y = -2x + 5$?

O gráfico dessa função deve ser decrescente, pois o coeficiente linear a é negativo; e interceptar o eixo y em $(0; 5)$, pois o coeficiente linear é $b = 5$.



Professor, nós falamos do intercepto-y, mas e o ponto em que a função corta o eixo x?

Excelente pergunta!

Esse ponto se chama intercepto-x, zero da função ou ainda, raiz da função.

Se os pontos do eixo vertical todos têm coordenadas $x = 0$, algo parecido acontece com o eixo horizontal: todos os pontos têm coordenadas $y = 0$.

Para saber onde a função corta o eixo x, basta substituir $y = 0$ na função. E isso funciona para todas as funções, não só para as funções de primeiro grau.

No gráfico, percebemos que a raiz é algo entre 2 e 3, mas não temos precisão para defini-la apenas graficamente.

Vamos calculá-la.

$$y = -2x + 5$$

$$0 = -2x + 5$$

$$2x = 5$$

$$x = \frac{5}{2}$$

$$x = 2{,}5$$

Assim, dizemos que a raiz da função

$$y = -2x + 5$$

é

$$x = 2{,}5$$

Professor, se o coeficiente b for nulo, a reta passa pela origem, correto?

Correto.

E o coeficiente a, pode ser nulo também?

Pergunta interessante, vejamos o que acontece se substituirmos o coeficiente angular a por 0.

Como padrão de comparação, usaremos a função cujo gráfico acabamos de esboçar

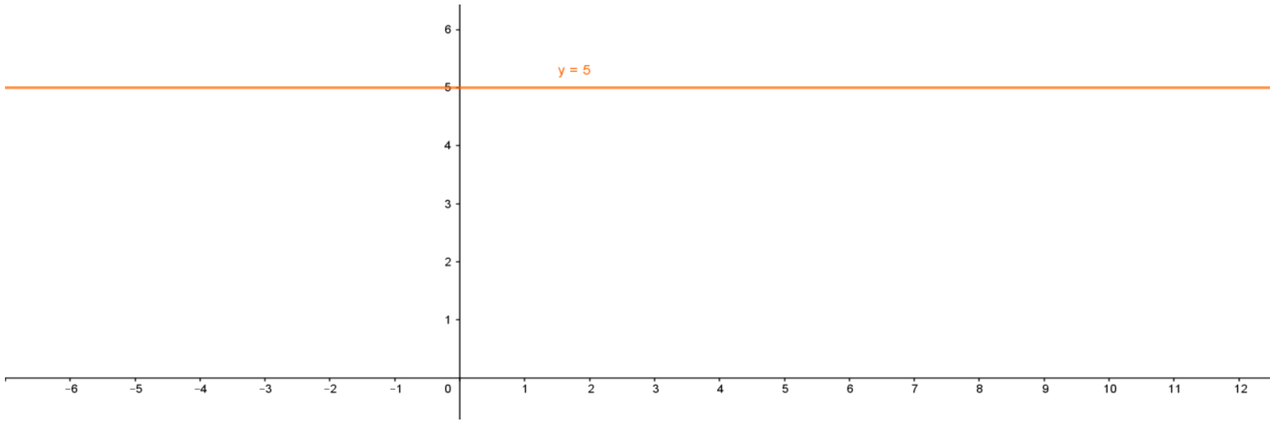
$$y = -2x + 5$$

Substituindo o coeficiente angular por 0, temos

$$y = 0.x + 5$$

$$y = 5$$

Isso significa que não há onde substituirmos o valor de x, ou seja, para qualquer valor de x, $y = 5$ e não há variação. Esse tipo de função é chamado de função constante e, para esse caso específico, tem o seguinte gráfico:



CURIOSIDADE

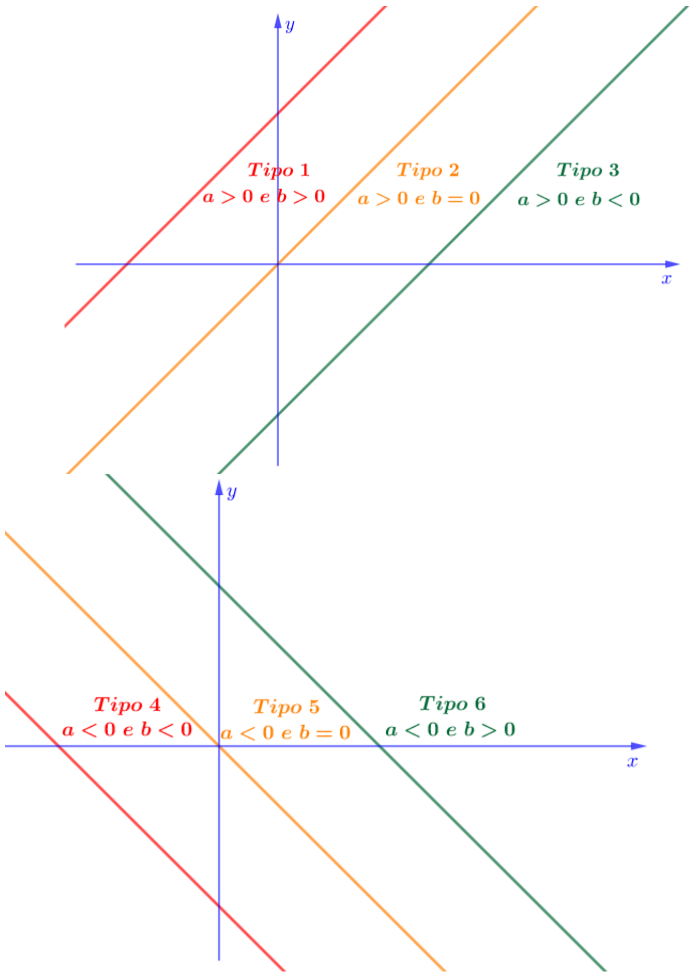
Você notou como passamos de uma função para uma equação quando foi preciso calcular a raiz?

É muito importante que você esteja ciente dos passos enquanto aprende e enquanto resolve os exercícios.

Lembre-se de praticar com simulados para manter-se afiado, combinado?

RESUMINDO

De acordo com o que vimos até agora, há 6 tipos principais de funções de primeiro grau, $f(x) = ax + b$, não constantes, veja a seguir:



Atenção, apenas nomeamos os tipos de função de 1 a 6 para numerar os tipos com um fim didático. Não se refira em uma prova a uma função do tipo 5, por exemplo. Em vez disso, explicite as condições dos coeficientes a e b.

HORA DE **PRATICAR!**

(Exercício de fixação) Esboce o gráfico de cada uma das funções abaixo.

$a)\ f(x) = 2x + 5$

$b)\ f(x) = -x$

$c)\ f(x) = 0{,}3x + 8$

$d)\ f(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{5}$

$e)\ f(x) = -x + \pi$

$f)\ f(x) = e.x - \pi$

$g)\ f(x) = \sqrt{5} + 3x$

$h)\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}x$

$i)\ f(x) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}x + 2$

$j)\ f(x) = -2x - \frac{1}{\sqrt{\pi}}$

Respostas:

$a)\ a > 0, b > 0, tipo\ 1$

$b)\ a < 0, b = 0, tipo\ 5$

$c)\ a > 0, b > 0, tipo\ 1$

$d)\ a > 0, b < 0, tipo\ 3$

$e)\ a < 0, b > 0, tipo\ 6$

$f)\ a > 0, b < 0, tipo\ 3$

$g)\ a > 0, b > 0, tipo\ 1$

$h)\ a > 0, b = 0, tipo\ 2$

$i)\ a < 0, b > 0, tipo\ 6$

$j)\ a < 0, b < 0, tipo\ 4$

1.6. Funções de segundo grau

A análise das funções de segundo grau seguirá o mesmo padrão que usamos para analisar as funções de primeiro grau.

A diferença é que nas funções de segundo grau teremos três coeficientes, não dois.

Pois bem. Uma função de segundo grau é da forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Alternativamente, podemos escrever

$$y = ax^2 + bx + c$$

Sem perda de significado.

Como você deve ter notado, são três coeficientes; a, b, c.

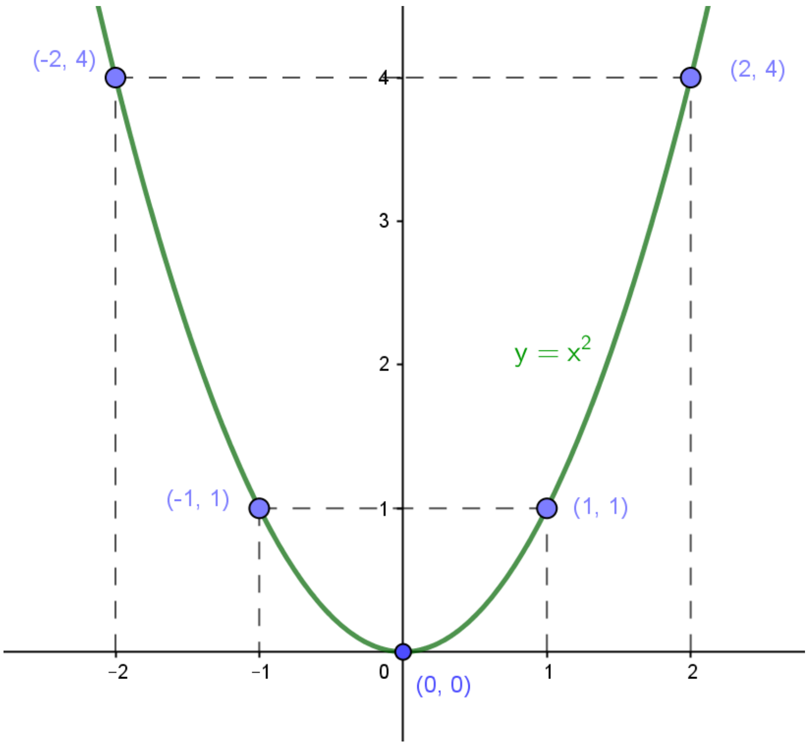
Uma particularidade da função de segundo grau é que o expoente dois torna valores negativos em positivos. É claro que isso não acontece com o termo de primeiro grau, mas, é um fator a se considerar quando estamos estudando gráficos de equações de segundo grau.

Como parâmetro, usaremos agora a função

$$y = 1x^2 + 0x + 0$$

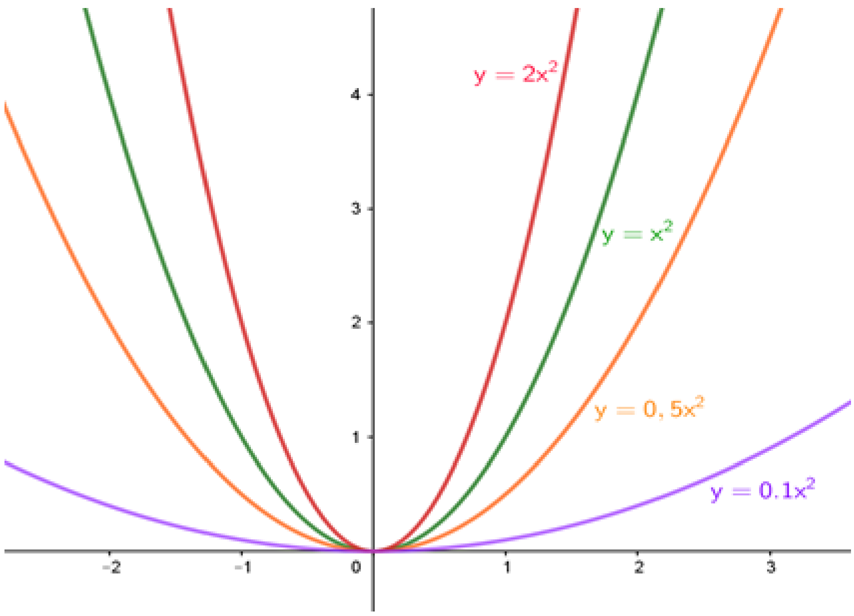
$$y = x^2$$

Como todos os valores de x serão elevados ao quadrado, essa função acaba sendo não negativa. Vejamos seu gráfico:



A função $y = x^2$ apresenta simetria axial[2] e esse eixo é exatamente o eixo vertical, ou seja, os valores de $f(x) = f(-x)$. Essa característica é consequência do expoente par da função e a classifica como função par, mas veremos essa classificação na aula 02. Por enquanto, basta notar a simetria e saber que nem toda função quadrática é par.

Para a primeira análise, veremos como é afetada a função ao variarmos o coeficiente a.



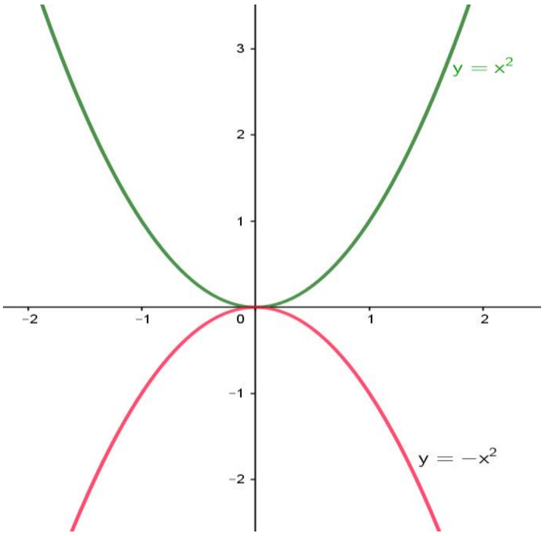
E qual seria a consequência de valores negativos no coeficiente a? Seria esse valor negativo afetado pela potência de x?

---

[2] Simetria Axial: diz-se de uma figura que tem, pelo menos, um eixo que a divide em duas partes semelhantes, iguais, correspondentes.

Escrevendo a função com $a < 0$, temos algo como em $y = -x^2$.

Nem o coeficiente a nem o seu sinal estão elevados ao quadrado. Assim, o sinal de a pode e deve ter interferência no gráfico da função. Só para deixar claro, aqui temos $a = -1$.



Nota-se que o coeficiente a tem influência na abertura da função $f(x) = ax^2$. A essa abertura, chamamos concavidade. Se o módulo de a aumenta, a concavidade se fecha; se diminui, a concavidade se abre. Além disso, valores negativos de a resultam em funções com concavidades voltadas para baixo e positivos, para cima.

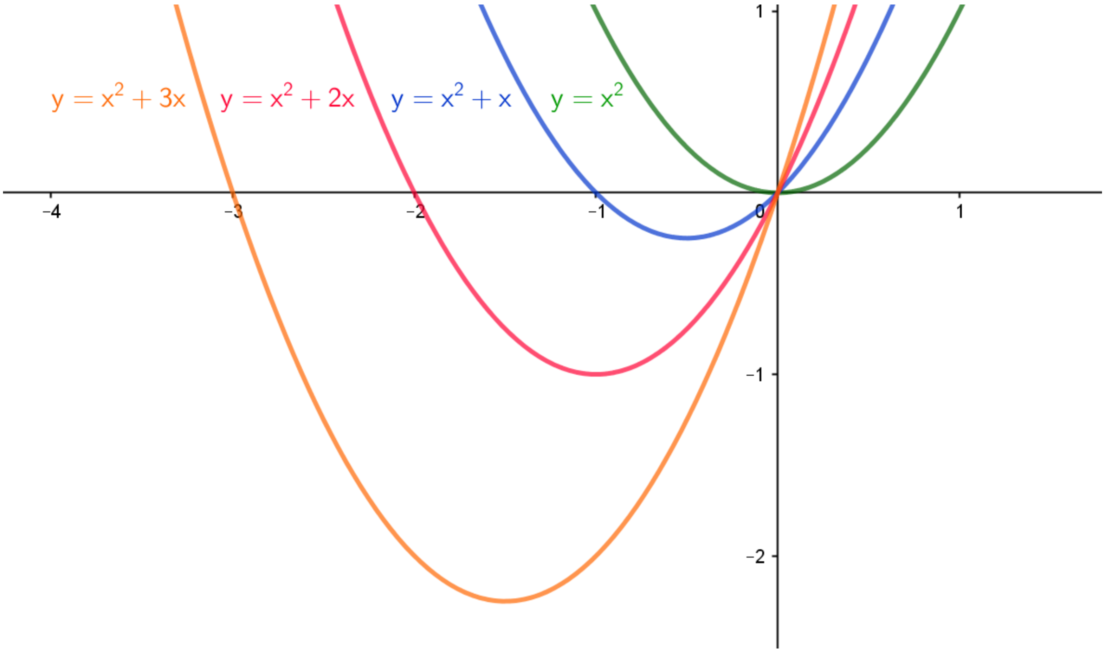
Essa curva que você notou nos gráficos recebe o nome de parábola e tem muitas características interessantes. Estudaremos essas propriedades com profundidade em Geometria Analítica e veremos, por exemplo, o motivo de usarmos antenas parabólicas para captar sinais de satélite. Por enquanto o que nos interessa é o comportamento da função de segundo grau, cujo gráfico é representado por uma parábola.

Entendido o coeficiente a, vamos para o coeficiente b. Usemos a função

$$y = 1x^2 + 0x + 0$$

$$y = x^2$$

como base de comparação e alteremos o valor de $b = 0$ para 1, 2 e 3.



As parábolas se mantiveram "presas" na origem $(0; 0)$, mas apareceu uma segunda raiz de módulo igual ao módulo de b, mas com sinal contrário.

Vejamos o porquê de isso ocorrer.

Se temos uma função incompleta do tipo

$$f(x) = ax^2 + bx$$

e queremos calcular suas raízes, nós colocaremos o valor zero no lugar da função, pois as raízes estão no eixo horizontal, lembra?

$$f(x) = ax^2 + bx$$
$$0 = ax^2 + bx$$
$$0 = x(ax + b)$$

Se um produto é zero, um dos fatores deve ser igual a zero, então:

$$x = 0 \qquad ou \qquad ax + b = 0$$

$$x = 0 \qquad ou \qquad x = -\frac{b}{a}$$

Como no nosso exemplo, $a = 1$

$$x = 0 \qquad ou \qquad x = -b$$

Exatamente o comportamento visto:

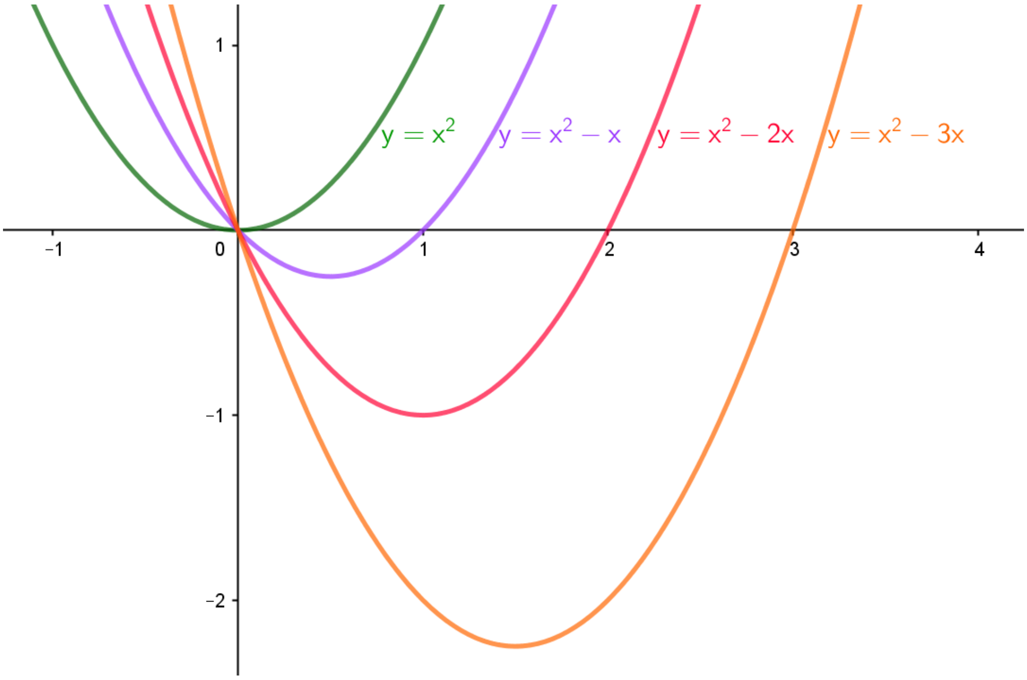
$$x = 0 \;\; e \;\; y = 0 \quad \rightarrow \;\; parábola\; presa\; na\; origem$$

$$x = -b \;\; e \;\; y = 0 \quad \rightarrow \;\; raiz\; com\; módulo\; igual\; ao\; módulo\; de\; b\; com\; sinal\; contrário$$

Assim, apesar de não ser uma translação somente horizontal, ocorre um "escorregamento da função quanto alteramos o coeficiente b.

Para confirmar, se o "escorregamento" sempre tem o sinal oposto de b, se colocarmos valores negativos para o coeficiente b a função "escorregaria" para a direita?

Teoricamente, sim. Façamos mais alguns gráficos só para confirmar.



Exatamente o que esperávamos.

E, para encerrar esse estudo, analisemos o comportamento da função

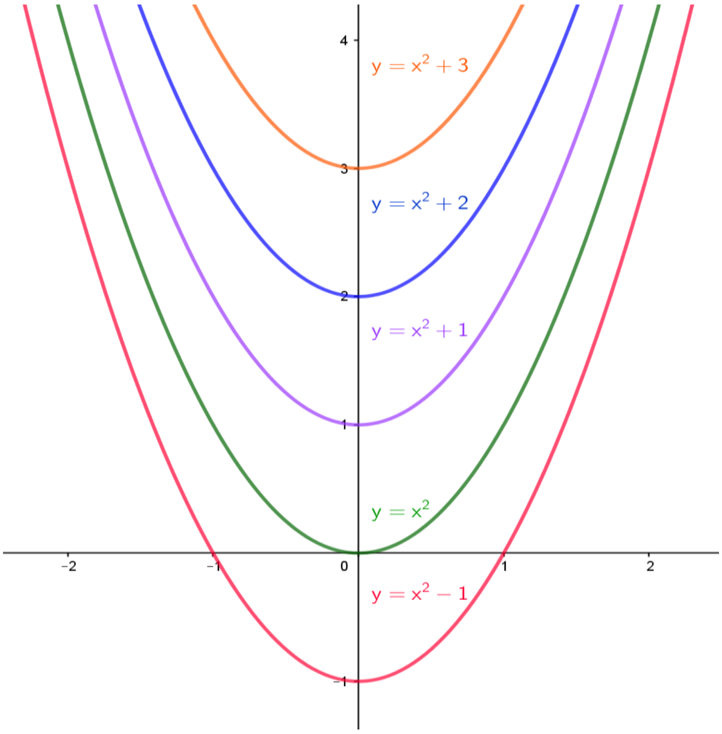
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

quando variamos os valores do coeficiente c.

Novamente, utilizaremos a função

$$y = 1x^2 + 0x + 0$$
$$y = x^2$$

como parâmetro e variaremos o coeficiente c de 0 para $-1, 1, 2, 3$.



Não é de se estranhar que o termo independente da função de segundo grau também traz a informação do intercepto-y. Afinal, se colocarmos valor nulo na variável x, o que sobra é só o termo independente. Veja.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f(0) = a0^2 + b0 + c$$

$$f(0) = c$$

Ou seja, o termo independente traz exatamente o valor do ponto em que a função quadrática corta o eixo vertical.

Voltando às funções do gráfico, atenção à função

$$f(x) = x^2 - 1$$

Ela apresenta duas raízes. Visualmente, no gráfico, vemos que devem ser $\{-1; 1\}$. Vamos conferir?

Para calcular as raízes, fazemos $y = 0$, então:

$$f(x) = x^2 - 1$$

$$0 = x^2 - 1$$

$$1 = x^2$$

$$\sqrt{1} = \sqrt{x^2}$$

$$1 = |x|$$

$$\pm 1 = x$$

Exatamente como previámos.

Agora, vejamos o que acontece com as funções que parecem "flutuar" no gráfico, não interceptando o eixo horizontal.

Vejamos o exemplo de

$$f(x) = x^2 + 1$$
$$0 = x^2 + 1$$
$$-1 = x^2$$
$$\sqrt{-1} = \sqrt{x^2}$$

Perceba que não existe, no conjunto dos números reais, a raiz quadrada de número negativo.

Veja bem, tínhamos uma função e queríamos descobrir a(s) raiz(raízes). Par isso, substituímos y por 0 e, nesse momento, passamos a ter uma equação que representa uma pergunta: qual o número cujo quadrado somado a um dá zero?

Quando chegamos a uma resposta inexistente, significa responder a essa pergunta dizendo: não existe número que satisfaça essa condição.

Como esse número representaria o(s) ponto(s) em que a função interceptaria o eixo horizontal, concluímos que a função está toda acima do eixo ou toda abaixo do eixo; não há intersecções entre esta e o eixo horizontal.

É extremamente importante que você esteja ciente do que calcula e, tanto quanto operar corretamente funções e equações, que consiga entender o que significam a cada momento. Assim você poderá aplicar as ferramentas matemáticas para resolver problemas de forma eficiente. Isso ajuda a passar no vestibular e a resolver problemas do cotidiano por meio da matemática também. Afinal, após o vestibular há toda uma faculdade a cursar, não é?

INDO MAIS FUNDO!

Vimos que as soluções para a equação

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \begin{cases} x' = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x'' = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases}$$

Ou, em sua forma alternativa,

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \begin{cases} x' = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x'' = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

Vimos também que para calcular as raízes de uma função, substituímos y por zero.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
$$0 = ax^2 + bx + c$$

Assim, o cálculo dos valores que satisfazem essa equação são também, quando no ambiente das funções quadráticas, suas raízes.

Sabemos também que não são todas as funções que têm raízes, algumas são estritamente positivas e outras, estritamente negativas; são os gráficos “flutuantes”.

Olhando para a forma alternativa de escrita para o cálculo das soluções da equação, percebe-se que há uma raiz quadrada envolvida, a raiz quadrada do discriminante

$$\sqrt{\Delta}$$

Como não existe raiz de números negativos no conjunto dos números reais, temos que, para haver raízes em uma função, necessariamente

$$\sqrt{\Delta}\ deve\ existir$$
$$\Delta \geq 0$$

São duas possibilidades condensadas na informação: o discriminante pode ser zero ou o discriminante pode ser positivo.

Com o discriminante positivo, já vimos que há duas raízes distintas, portanto, a função corta o eixo horizontal duas vezes.

Caso o discriminante seja zero, vejamos o que acontece:

$$\Delta = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \begin{cases} x' = \dfrac{-b + \sqrt{0}}{2a} = \dfrac{-b}{2a} \\ x'' = \dfrac{-b - \sqrt{0}}{2a} = \dfrac{-b}{2a} \end{cases}$$

As duas raízes, x' e x'' passam a ser idênticas!

Dizemos que a função só tem uma raiz ou, mais tecnicamente, que tem apenas uma raiz de multiplicidade dois, pois funções do segundo grau devem ter duas raízes.

Nesse caso, a função apenas toca o eixo horizontal do gráfico, como vimos no caso de

$$f(x) = x^2$$

Obviamente, caso a função apresente

$$\Delta < 0$$

ela não apresenta raízes reais, é estritamente positiva ou estritamente negativa e não toca o eixo das abcissas.

Mas professor, você não falou que toda função do segundo grau deve ter duas raízes, por isso a raiz única quando $\Delta = 0$ é chamada de raiz de multiplicidade dois?

Falei.

Então, onde estão as duas raízes das funções que apresentam $\Delta < 0$?

Para o caso $\Delta < 0$, existem também duas raízes, mas elas são do domínio dos números complexos. Perceba que eu disse que não havia raízes no conjunto dos números reais. Você aprenderá a calcular essas raízes na aula sobre números complexos, não se preocupe com isso agora.

HORA DE PRATICAR!

(Questão inédita/2018) Considerando a função

$$f(x) = x^2 + (m+2)x + 1$$

O valor de m para que $f(x)$ tenha apenas uma raiz de multiplicidade dois é

a) $m = -2$ ou $m = 2$

b) $m = 2$

c) $m = 0$ ou $m = 2$

d) $m = -2$

e) $m = -4$ ou $m = 0$

Comentários:

Para que a função

$$f(x) = x^2 + (m+2)x + 1$$

tenha apenas uma raiz, é necessário que

$$\Delta = 0$$

$$\Delta = \sqrt{b^2 - 4ac} = 0$$

$$\sqrt{(m+2)^2 - 4.1.1} = 0$$

$$\left(\sqrt{(m+2)^2 - 4}\right)^2 = 0^2$$

$$|(m+2)^2 - 4| = 0$$

$$(m+2)^2 - 4 = 0$$

$$m\hat{\ }2 + 4m + 4 - 4 = 0$$

$$m^2 + 4m + 4 - 4 = 0$$

$$m^2 + 4m = 0$$

$$m(m+4) = 0$$

$$m = 0 \quad ou \quad (m+4) = 0$$

$$m = 0 \quad ou \quad m = -4$$

Gabarito: “e”.

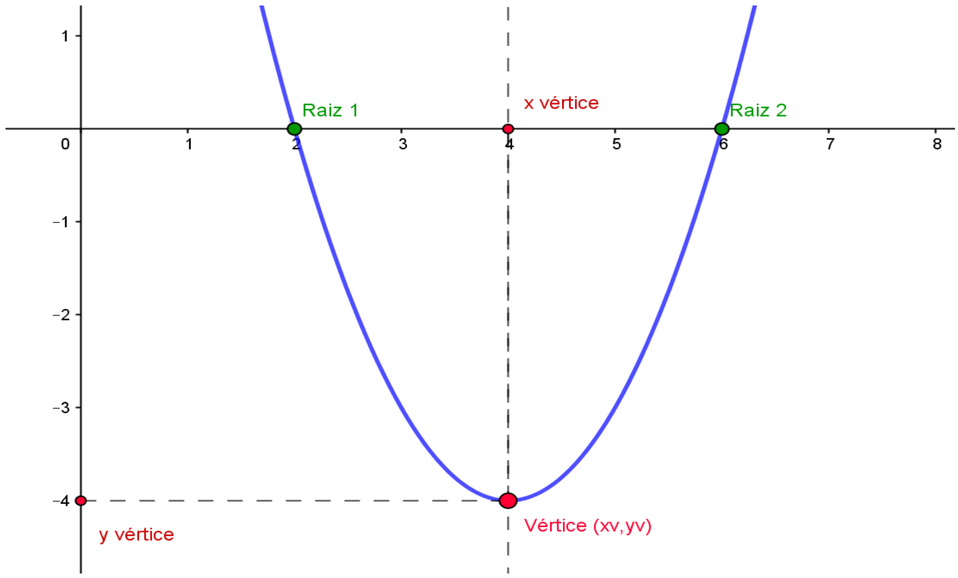
1.6.1. Máximos e mínimos da função do segundo grau

A essa altura, você já deve ter percebido que as funções do segundo grau apresentam um ponto mais alto ou um ponto mais baixo, a depender do sinal do coeficiente a.

Esse ponto é especial e, por ser um máximo ou um mínimo, interessa a muitos campos de estudo.

Por isso, é interessante acharmos um modo prático de encontrá-lo.

Vejamos um gráfico genérico de $f(x) = ax^2 + bx + c$



Ao ponto mais alto ou mais baixo da parábola, chamamos vértice e este tem duas coordenadas: x vértice e y vértice.

Como a parábola é simétrica, podemos dizer que a coordenada x do vértice, ou x vértice, está bem no meio entre as raízes, assim, podemos calculá-lo.

Se as raízes são dadas por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \begin{cases} x' = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x'' = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases}$$

O ponto médio entre as raízes é:

$$x_v = \frac{\dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}{2}$$

$$x_v = \frac{\dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}{2}$$

$$x_v = \frac{-2b}{4a} = \boldsymbol{\frac{-b}{2a}}$$

Assim, podemos sempre saber qual a coordenada x do vértice pela fórmula acima.

Perceba que descobrimos essa fórmula para o x-vértice (x_v) ao fazer a média entre as raízes, então, você também pode fazer isso se as conhecer:

$$\boldsymbol{x_v} = \frac{\boldsymbol{x' + x''}}{2}$$

Já para descobrir a coordenada y do vértice, podemos aplicar o valor de x vértice na própria função, veja:

$$y_v = a\boldsymbol{x_v}^2 + b\boldsymbol{x_v} + c$$

Se aplicarmos a coordenada x do vértice, a coordenada y corresponderá, também, ao vértice.

$$y_v = a\left(\frac{\boldsymbol{-b}}{\boldsymbol{2a}}\right)^2 + b\left(\frac{\boldsymbol{-b}}{\boldsymbol{2a}}\right) + c$$

$$y_v = \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$y_v = \frac{ab^2 - 2ab^2 + 4a^2c}{4a^2}$$

$$y_v = \frac{-ab^2 + 4a^2c}{4a^2}$$

$$y_v = \frac{-a(b^2 - 4ac)}{4a^2}$$

$$y_v = \frac{-a(b^2 - 4ac)}{4a^2}$$

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

Agora, sempre que precisarmos de máximos e mínimos de uma parábola, lembremos de seu vértice V:

$$V = (x_v; y_v) = \left(\frac{-b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\right)$$

(Exercício de fixação) Esboce, em um mesmo plano cartesiano, o gráfico de cada uma das funções abaixo.

$a)\ f(x) = x^2 - 5x + 6$

$b)\ f(x) = x^2 - x - 6$

$c)\ f(x) = x^2 + 5x + 6$

$d)\ f(x) = -x^2 + 5x - 6$

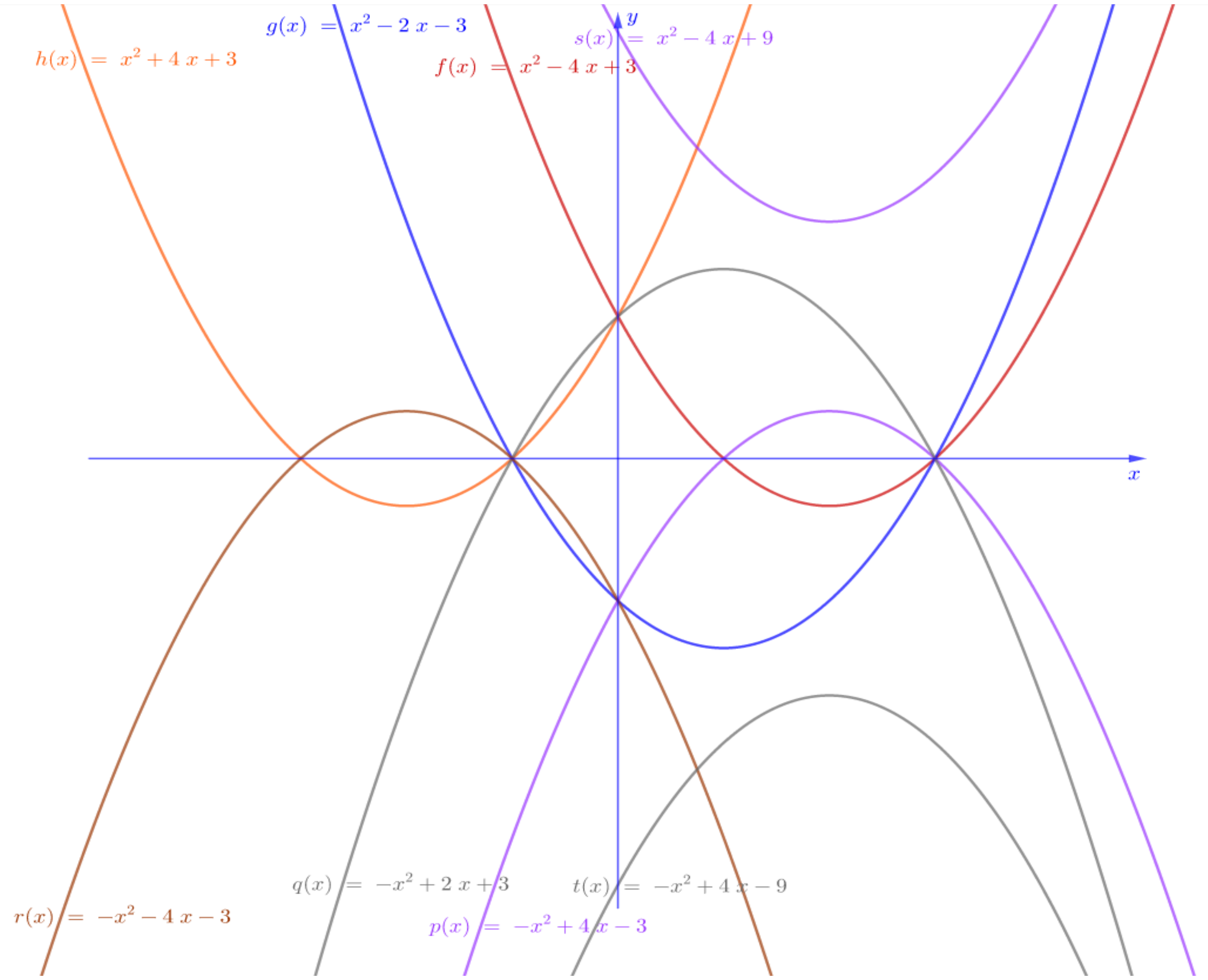
$e)\ f(x) = -x^2 + x + 6$

$f)\ f(x) = -x^2 - 5x - 6$

$g)\ f(x) = x^2 - 4x + 9$

$h)\ f(x) = -x^2 + x - 4$

Respostas

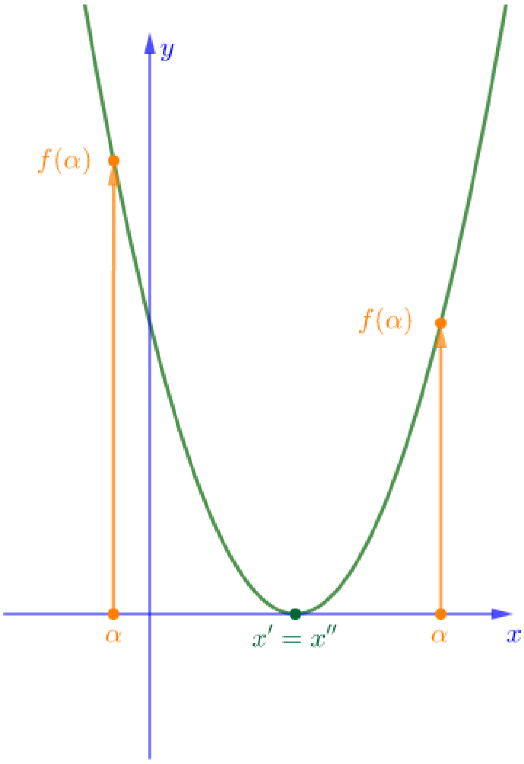


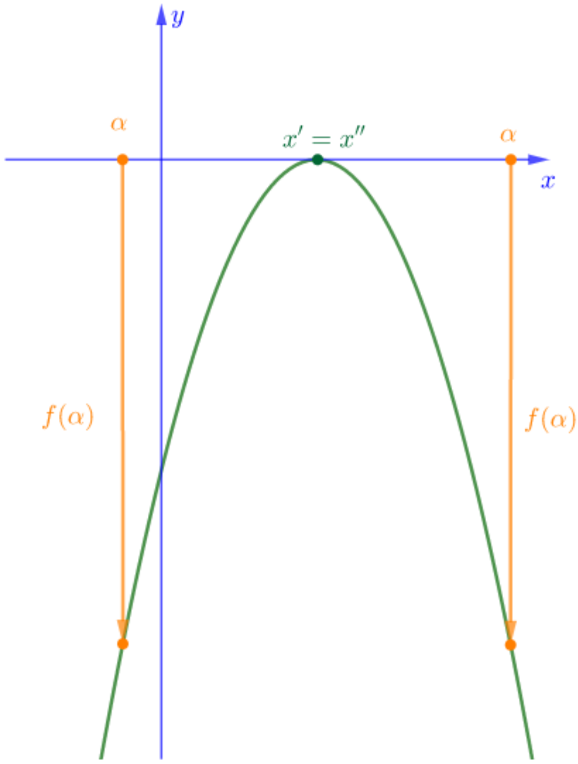
1.7. Teorema $a.f(\alpha)$

Pensemos em uma função do segundo grau de equação $f(x) = ax^2 + bx + c$, de raízes x' e x'', e um número α pertencente ao domínio da função f.

Nessas condições, temos algumas condições distintas:

$$\begin{matrix} a > 0 \quad ou \quad a < 0 \\ e \\ \Delta = 0 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a.f(\alpha) > 0 \; se \; \alpha \; não \; for \; raiz \\ a.f(\alpha) = 0 \; se \; \alpha \; é \; uma \; das \; raízes \end{cases}$$



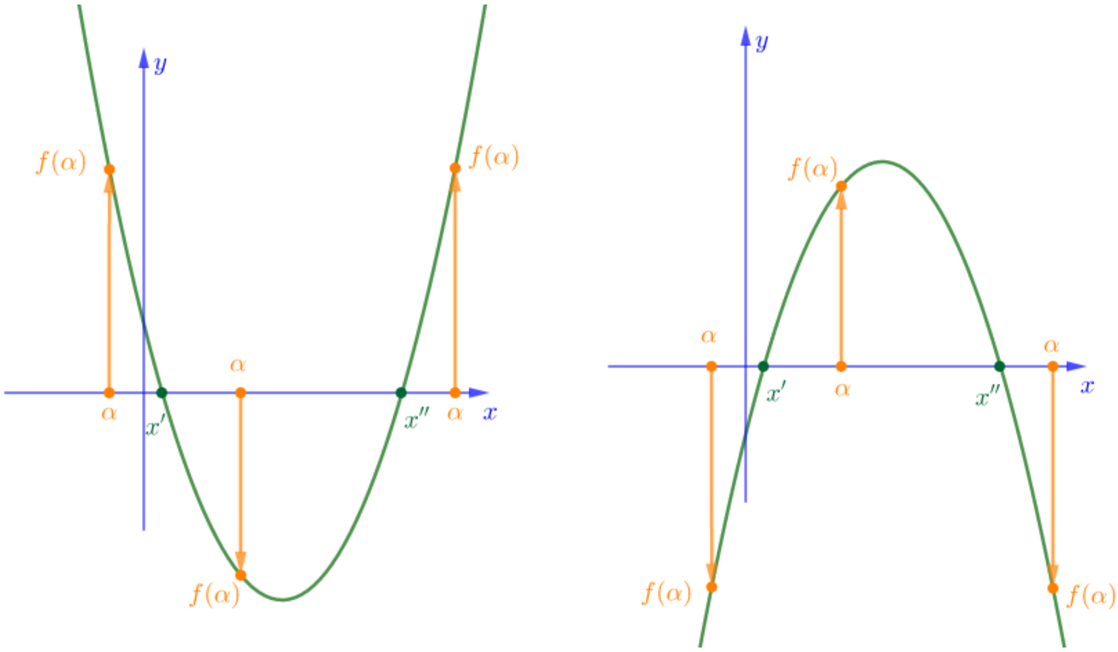


Perceba que, em ambos os casos, temos que ou $a.f(\alpha) > 0 \; se \; \alpha \; não \; for \; raiz$ ou $a.f(\alpha) = 0 \; se \; \alpha \; é \; uma \; das \; raízes$.

Atenção, estamos multiplicando o coeficiente a por $f(\alpha)$, mesmo α sendo negativo, $f(\alpha)$ é positivo nesse caso, pois está acima do eixo das abscissas, ok?

Próximo caso:

$$\begin{matrix} a > 0 \quad ou \quad a < 0 \\ e \\ \Delta > 0 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a.f(\alpha) > 0 \; se \; \alpha \; não \; está \; entre \; as \; raízes \\ a.f(\alpha) < 0 \; se \; \alpha \; está \; entre \; as \; raízes \end{cases}$$



Perceba que, para α à esquerda de x' ou à direita de x'', temos sempre $a.f(\alpha) > 0$, ou seja, como $a > 0$, $a.f(\alpha) > 0$.

Já para o caso de α estar entre as raízes, temos sempre $a.f(\alpha) < 0$. Muita atenção a esse caso, pois, dentre esses, é o mais cobrado em prova.

Professor, entendi todas as condições, mas dá para saber se α está à esquerda ou à direita das raízes, quando não estiver entre as raízes?

Pois é, dá sim.

Para isso, vamos analisar as raízes mais de perto.

Sabemos que a coordenada x-vértice está equidistante das raízes, ou seja, podemos calculá-la tanto pela fórmula vista anteriormente quanto pela semissoma das raízes, veja:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{x' + x''}{2}$$

Tomando $x' \leq x''$, podemos dizer:

$$x' < x''$$

$$x' \leq \frac{x' + x''}{2} \leq x''$$

A maioria dos livros gosta de chamar $S = x' + x''$, então:

$$x' \leq \frac{x' + x''}{2} \leq x''$$

$$x' \leq \frac{S}{2} \leq x''$$

Se estamos procurando em que posição, à direita da maior raiz ou à esquerda da menor, se encontra um número α, podemos concluir que:

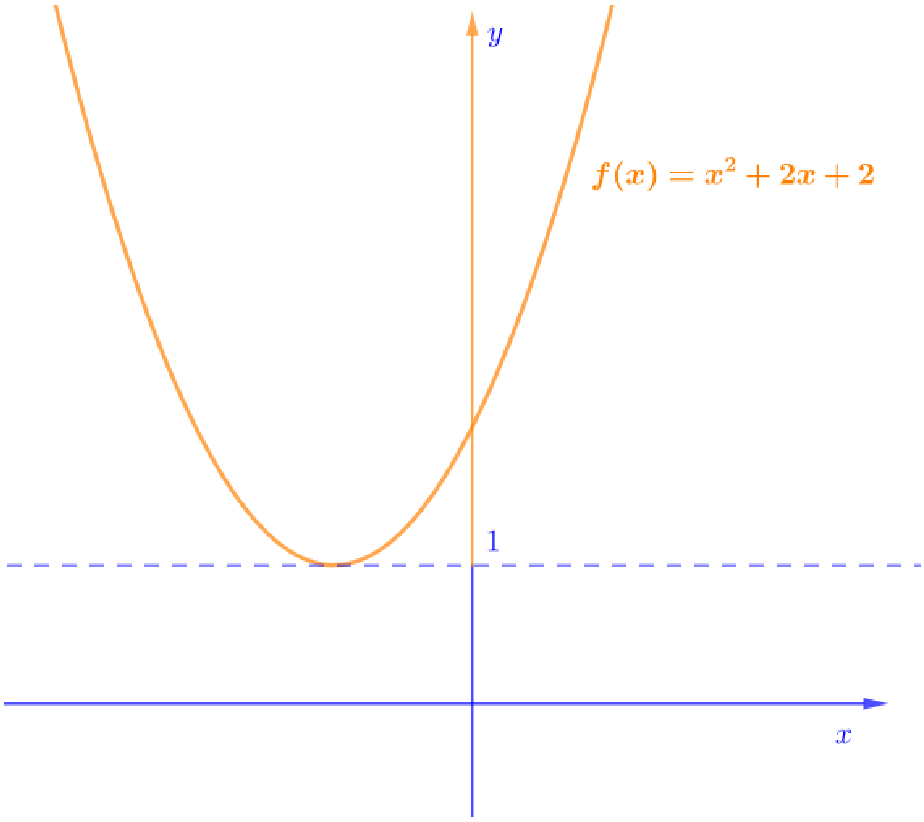
$$a.f(\alpha) > 0 \; e \; \Delta \geq 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha < x_1 \leq x_2 \; se \; \alpha < \dfrac{S}{2} \\ x_1 \leq x_2 < \alpha \; se \; \alpha > \dfrac{S}{2} \end{cases}$$

1.8. Conjuntos domínio, contradomínio e imagem no plano cartesiano

Voltemos ao aos conjuntos: domínio, contradomínio e imagem das funções.

Porém, agora, veremos como reconhecer esses conjuntos diretamente no gráfico.

Utilizemos, como exemplo, a função



Perceba que, enquanto podemos colocar quaisquer valores reais para a variável independente x, os valores de $f(x)$ sempre serão iguais ou maiores que 1. Dessa forma, podemos dizer que o conjunto imagem para essa $f(x)$ é:

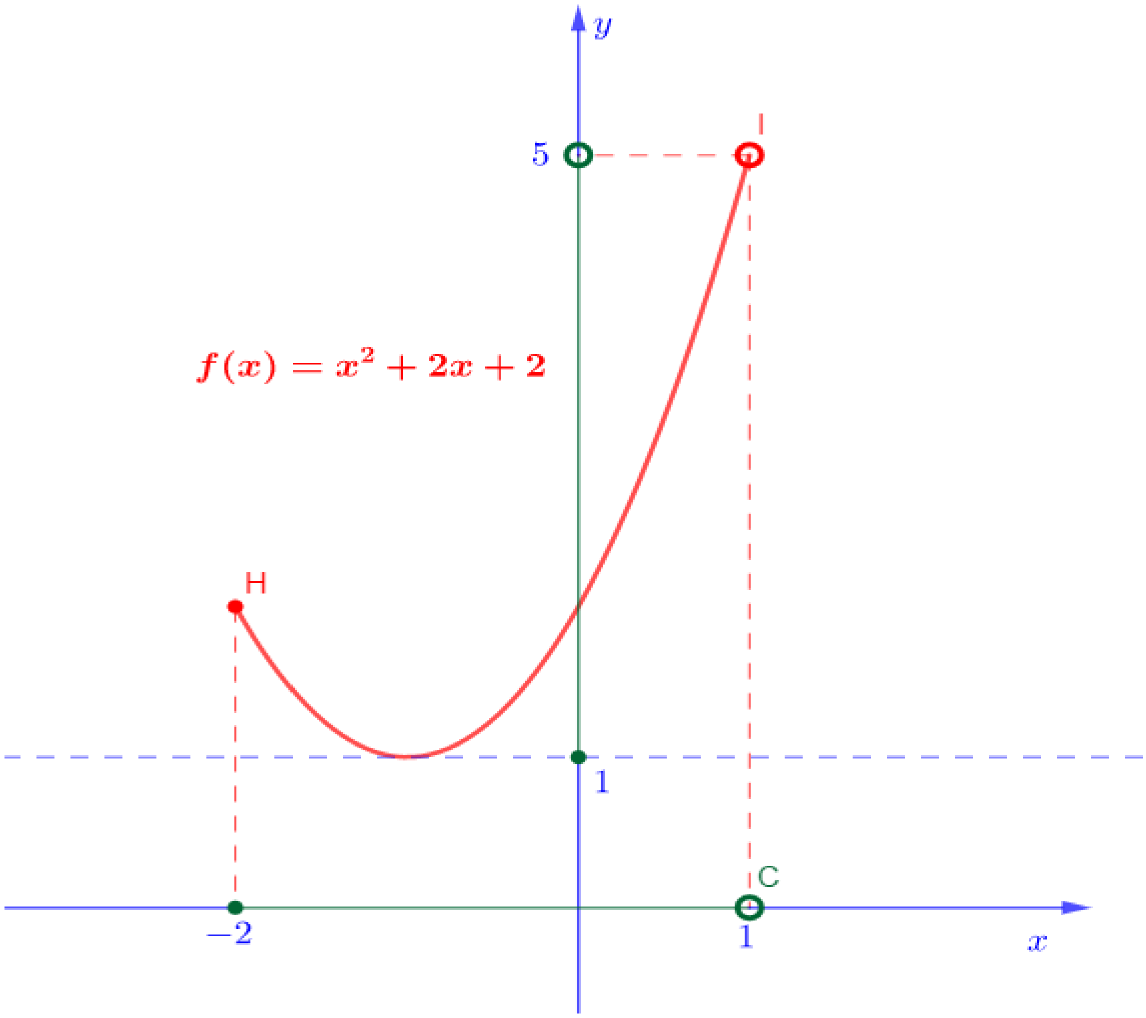
$$Im_f = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 1\}$$

Escrevemos o conjunto imagem com referência a y e não a x, pois estamos trabalhando com os valores da função e não da variável x.

Nesse gráfico, não há a indicação de limitação para os valores de x, então não há motivos para inferirmos que eles sejam limitados. Assim, já que a própria função não apresenta condições para que exista, podemos inferir que o domínio, definido o mais amplamente possível, é todo o conjunto dos números reais.

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}\}$$

Veja outro exemplo:



Veja que a função é a mesma do exemplo anterior, no entanto os valores para x estão delimitados ao intervalo [-2;1[.

Quando delimitamos os valores da variável independente, os valores da variável dependente, ou da função, apresentam a consequência que, neste caso, é a de ter seus valores limitados, no eixo y, a valores compreendidos no intervalo [1;5[.

Explicitando para o gráfico apresentado temos:

$$Im_f = \{y \in \mathbb{R}: 1 \le y < 5\}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}: -2 \le x < 1\}$$

Dizemos que essa função é válida apenas para o intervalo específico de seu domínio.

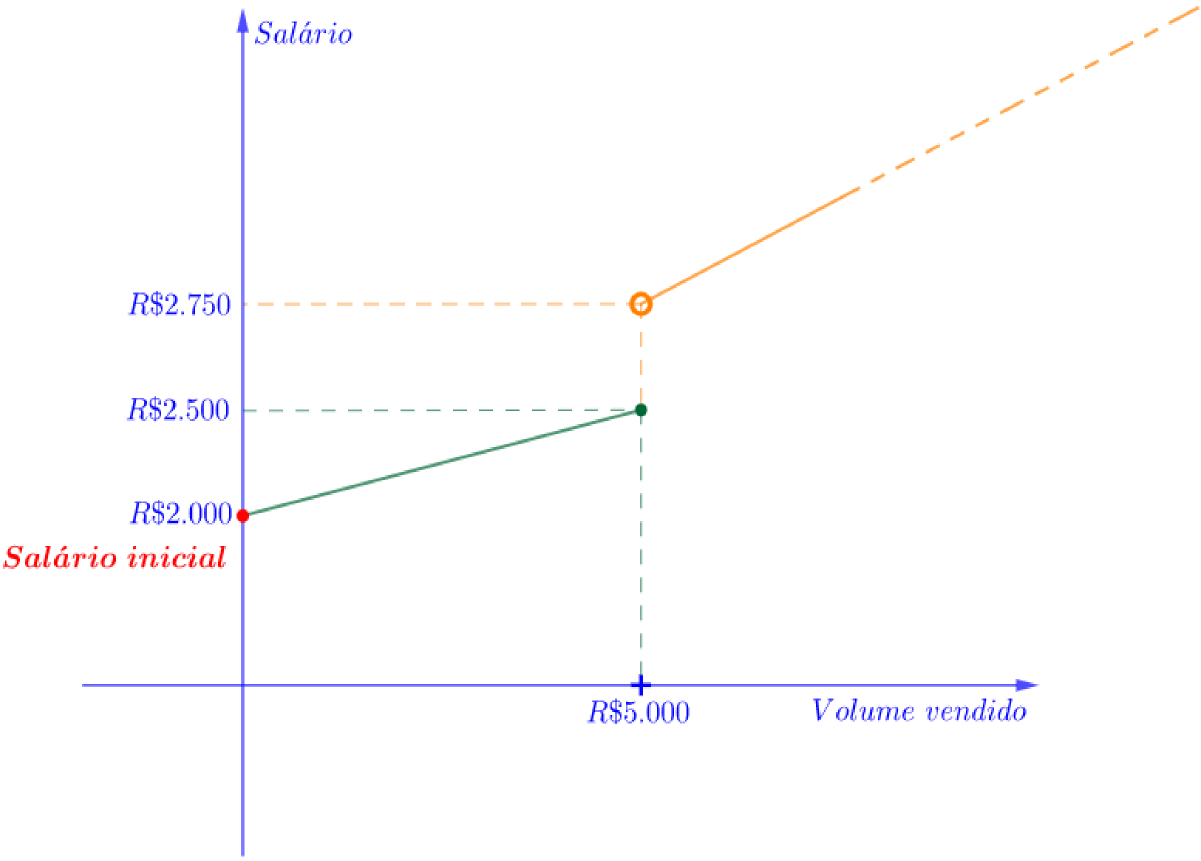
1.9. Função dada por intervalos

Percebemos, no tópico anterior, que uma função pode ser válida apenas em um intervalo.

O que veremos aqui é que, na verdade, podemos ter várias definições diferentes para intervalos diferentes.

Imagine um vendedor seguros que tem seu salário dado pelas seguintes condições:

Vamos simbolizar essa informação em um plano cartesiano?



O esboço mostra que, para diferentes faixas de volume vendido, há comportamentos distintos para o salário.

Essa é uma situação muito comum no dia-a-dia comercial.

INDO MAIS **FUNDO!**

Agora, vamos representar essa situação de modo mais formal, definindo o salário S em função do volume v vendido.

$$S(v) = \begin{cases} 2000, se\ v = 0 \\ 2000 + (10\%).\, v, se\ 0 < v \leq 5000 \\ 2000 + (15\%).\, v, se\ v \geq 5000{,}01 \end{cases}$$

Como $S(v)$ é dividida em segmentos, dizemos que ela é uma função dada por intervalos.

Vamos a mais um exemplo?

Veja a função

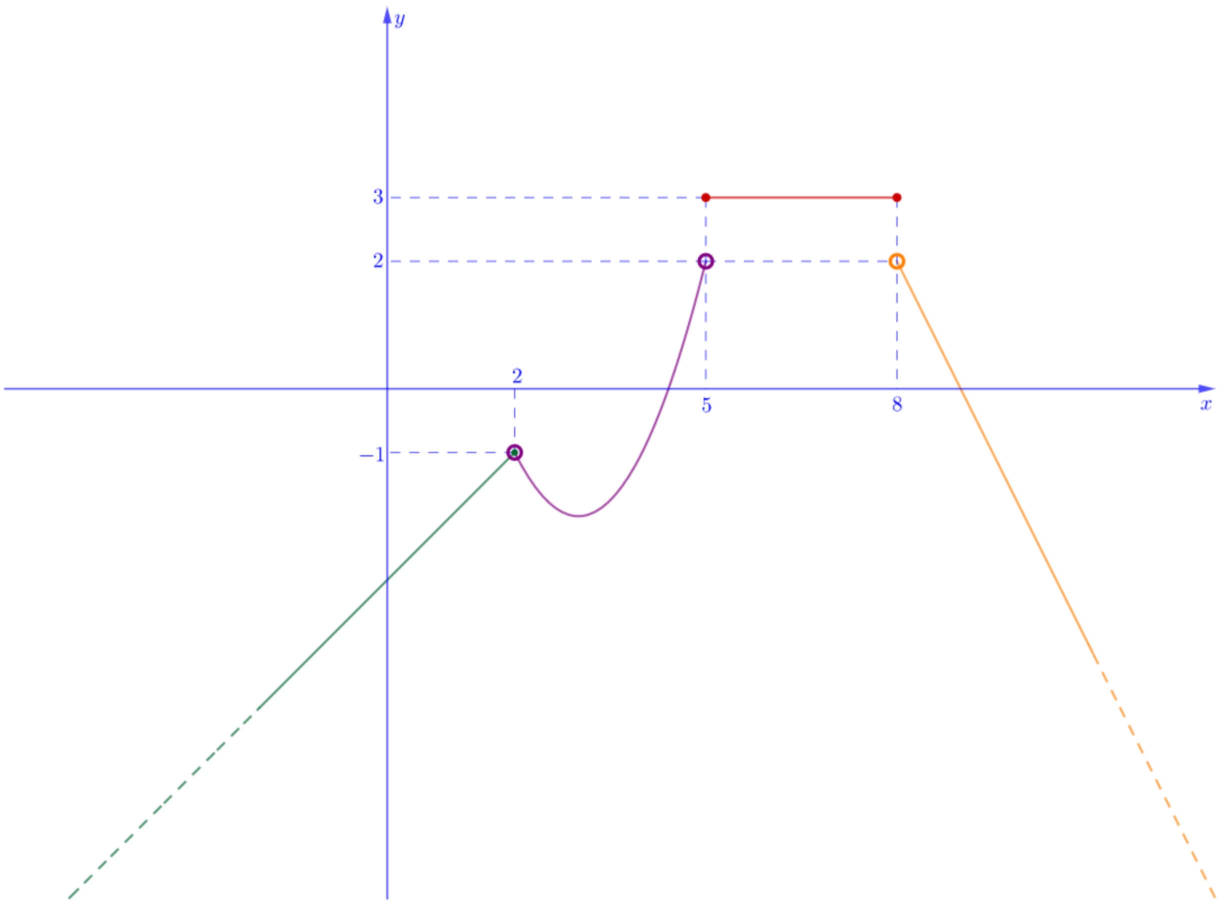
$$f(x) = \begin{cases} x - 3, se -\infty < x \leq 2 \\ x^2 - 6x + 7, se\ 2 < x < 5 \\ 3, se\ 5 \leq x \leq 8 \\ -2x + 18, se\ x > 8 \end{cases}$$

Já sabemos esboçar todas essas funções separadamente. Para termos uma única função, definida em intervalos, basta que esbocemos cada uma das condições como se fossem uma função única e, após, aproveitar apenas a parte do gráfico que esteja no intervalo solicitado.

Por exemplo a parte de $f(x) = x^2 - 6x + 7$, esboçamos toda a parábola e aproveitamos apenas o "pedaço" da parábola que tem seus valores de x entre 2 e 5.

Não se esqueça de que as "bolinhas" fechadas no gráfico simbolizam pontos de inclusão, equivalentes à parte de igualdade do símbolo de $\leq$ utilizado na definição algébrica da função por intervalos.

Vejamos como fica o esboço do gráfico de $f(x)$.



1.10. Função inversa

Já iniciaremos os estudos da função inversa com um sinal de alerta.

NÃO CONFUNDA!

O inverso de um número é uma fração com esse número no denominador.

O inverso de 5 é $1/_5$.

Uma função inversa não tem a ver com esse conceito!

A inversa de uma função é outra função que cumpre um papel específico: o de "desfazer" o que foi feito pela função original.

Vejamos um caso específico.

Para a função

$$f(x) = 2x + 5,$$

calcule $f(5)$.

Pela definição da função, temos:

$$f(x) = 2x + 5$$
$$f(5) = 2.5 + 5$$
$$f(5) = 15$$

Pois bem, a função $f(x)$, com entrada $x = 5$, retorna $f(5) = 15$.

Agora, procuremos uma função que faz exatamente o contrário, ao ser alimentada com entrada $x = 15$, retorne o 5. A função que fizer isso para qualquer x pertencente ao domínio de $f(x)$ será nossa função inversa, simbolizada por $f^{-1}(x)$.

ESQUEMATIZANDO

Uma regra prática para encontrarmos a função inversa é inverter a notação de x e $f(x)$ na função inicial e, então, isolar o x. Pode-se, alternativamente, usar y no lugar de $f(x)$.

Para evitar confusão, indico, já na troca inicial, simbolizar a função inversa com $f^{-1}(x)$. Assim você evita erros por causa de troca de notação.

No exemplo dado, calculemos, pela regra prática, a inversa de $f(x)$.

Função original a ser invertida:

$$f(x) = 2x + 5$$

Trocando a notação:

$$x = 2.y + 5$$
$$x = 2.f(x) + 5$$
$$x = 2.f^{-1}(x) + 5$$

Nesse curso, usaremos, preferencialmente, a notação:

$$x = 2.f^{-1}(x) + 5$$

Isolando $f^{-1}(x)$

$$x = 2.f^{-1}(x) + 5$$

Subtraindo 5 de ambos os membros

$$x - 5 = 2.f^{-1}(x)$$

Dividindo ambos os membros por 2

$$\frac{x-5}{2} = \frac{\cancel{2}.f^{-1}(x)}{\cancel{2}}$$
$$\frac{x-5}{2} = f^{-1}(x)$$

Desse modo, definimos a inversa de $f(x)$ como sendo

$$f^{-1}(x) = \frac{x-5}{2}$$

Vamos testar para ver se, ao colocarmos $x = 15$ essa função retorna $f^{-1}(15) = 5$ como esperávamos?

$$f^{-1}(x) = \frac{x-5}{2}$$

$$f^{-1}(15) = \frac{15-5}{2}$$

$$f^{-1}(15) = \frac{10}{2}$$

$$f^{-1}(15) = 5$$

Desse modo, podemos dizer que a inversa de

$$f(x) = 2x + 5$$

é

$$f^{-1}(x) = \frac{x-5}{2}.$$

1.10.1. Consequência da definição de função inversa

ATENÇÃO!!

A função inversa é, como o próprio nome diz, uma função.

E o que é necessário para que tenhamos, propriamente, uma função?

São duas condições:

Função

1) A regra da função deve fornecer um $f(x)$ para todo x pertencente ao Domínio. Sem exceções.

2) Não são aceitas ambiguidades. A cada x deve haver um único $f(x)$ correspondente.

Como você deve ter percebido, na função inversa, os valores da variável independente x se transformam em variável dependente $f^{-1}(x)$ e vice-versa.

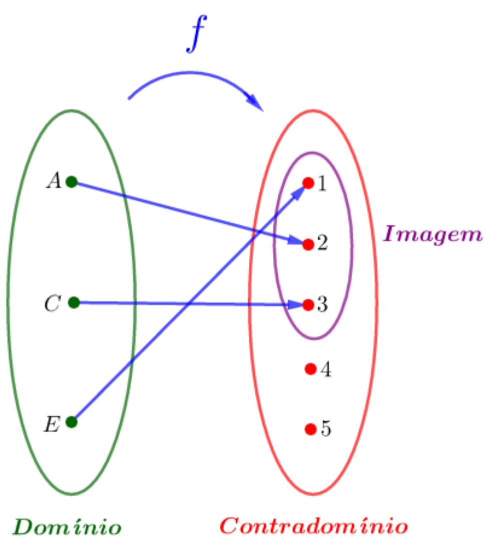
Pensando nos conjuntos domínio e contradomínio, o domínio de $f(x)$ passa a ser o contradomínio de $f^{-1}(x)$, enquanto o contradomínio de $f(x)$ passa a ser o domínio de $f^{-1}(x)$.

E o que isso quer dizer, professor?

Bom, como o contradomínio de uma se transforma no domínio da outra e o domínio não admite ficar sem correspondência, só podemos fazer funções inversas de funções cujos contradomínios estejam completamente relacionados.

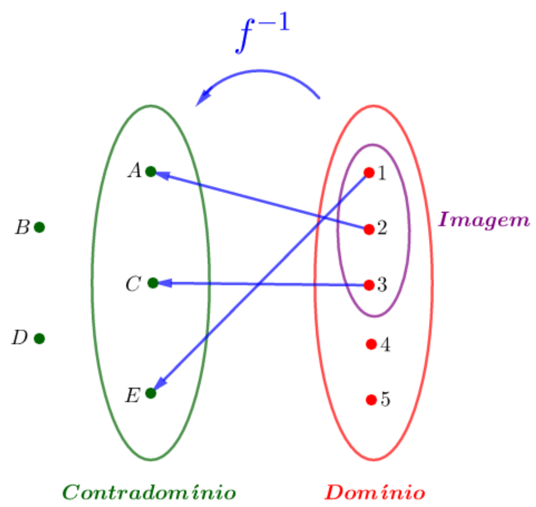
Vish, professor, complicou.

Calma, vejamos como fica essa afirmação nos diagramas que usamos para definir as funções.



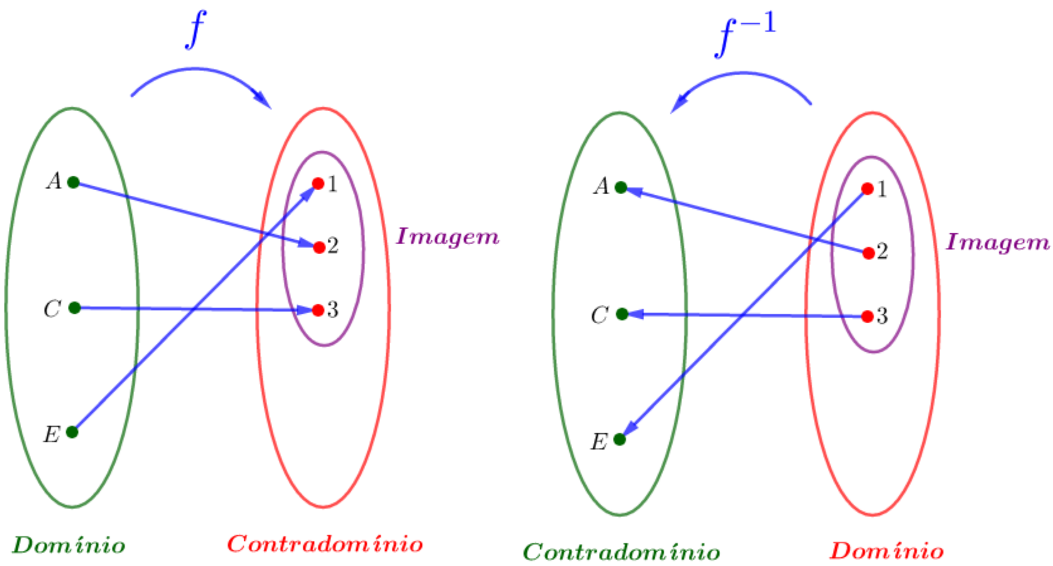
Claramente, temos uma função: todos os valores do domínio têm correspondentes e não há mais de um correspondente por cada elemento do domínio.

Agora, vamos tentar inverter a função f.



Perceba que f^{-1} não é uma função, pois nem todos os elementos de seu conjunto domínio estão relacionados.

Se retirarmos, então, os elementos 4 e 5 do contradomínio de f, poderemos invertê-la tranquilamente, veja:



TOME NOTA!

Daqui tiramos uma conclusão importantíssima:
somente funções bijetivas têm inversas!

1.11. Função Raiz

Se eu perguntar a você qual é a operação inversa da operação de soma, provavelmente você me responderá que é a subtração.

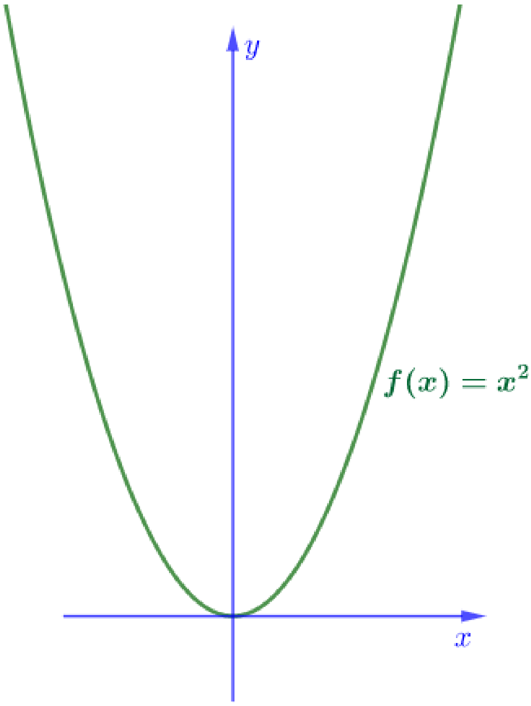
Da multiplicação? A divisão.

Da potenciação? Exatamente, a radiciação.

Calculemos, então, a função inversa de

$$f(x) = x^2.$$

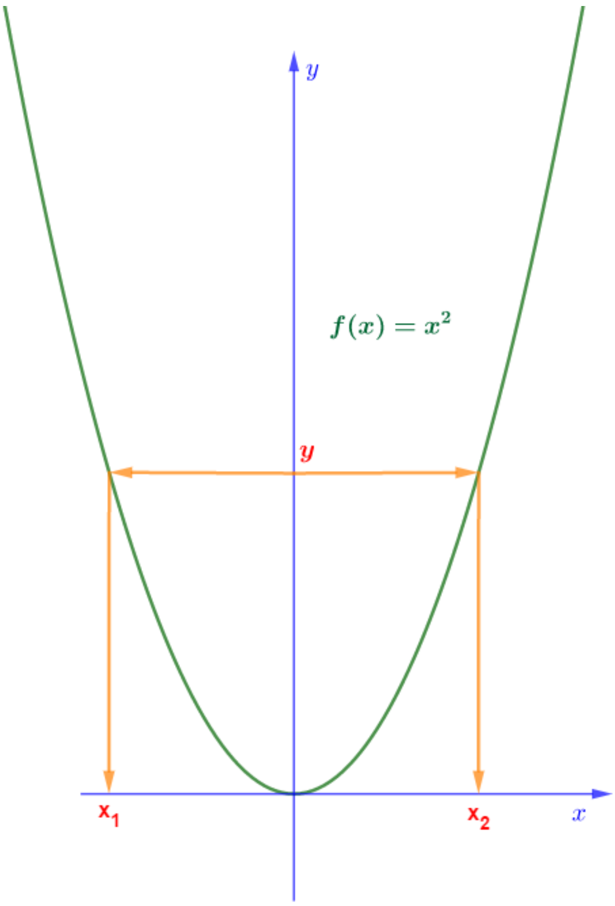
Antes de calcularmos a inversa, lembre-se do gráfico dessa função:



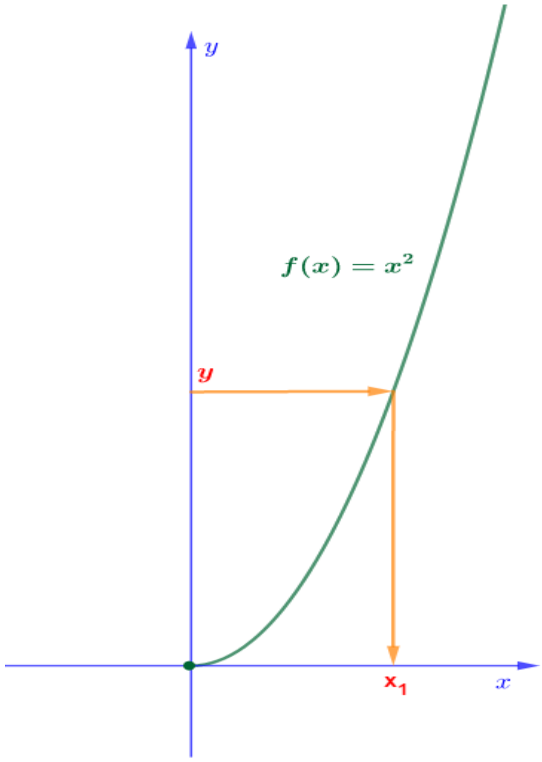
Perceba que

$$f(x) = x^2$$

não é uma função bijetiva, pois há, para um único elemento de y, mais de um elemento x correspondente.



Para que a função seja inversível, podemos redefinir seu domínio, digamos para $x \geq 0$, para que isso não aconteça, veja:



Agora sim, podemos continuar a definir nossa $f^{-1}(x)$.

Procedamos exatamente como no item anterior para encontrar a função inversa: inversão da nomenclatura.

$$f(x) = x^2$$
$$x = f^{-1}(x)^2$$

Como dissemos há pouco, a operação inversa da potenciação é a radiciação, então, raiz em ambos os membros da equação.

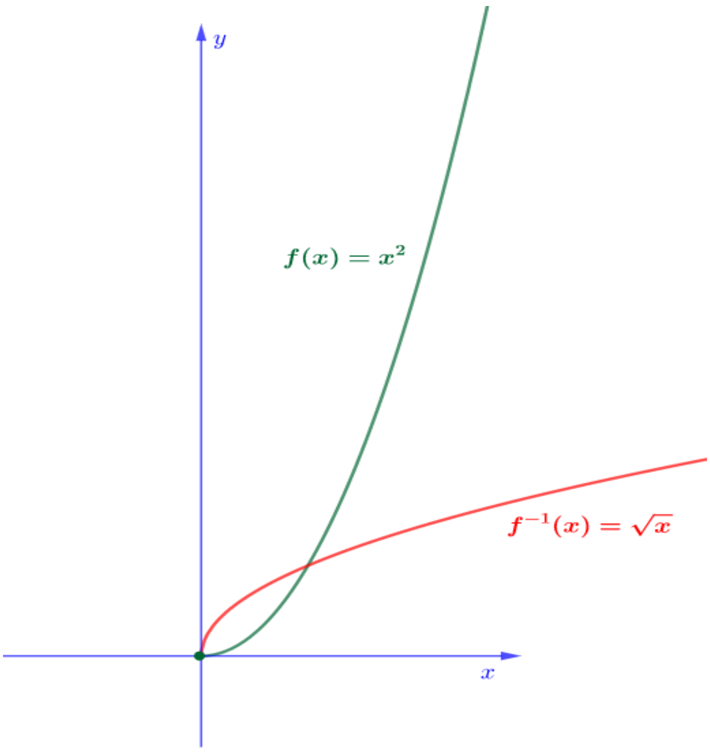
$$x = f^{-1}(x)^2$$
$$\sqrt{x} = \sqrt{f^{-1}(x)^2}$$
$$\sqrt{x} = \sqrt{f^{-1}(x)^2}$$

Novamente, nós vamos estudar mais a fundo essa questão da raiz quadrada de algo elevado ao quadrado na aula sobre módulos. Como nosso domínio contém apenas valores positivos, podemos dizer que

$$\sqrt{x} = f^{-1}(x)$$

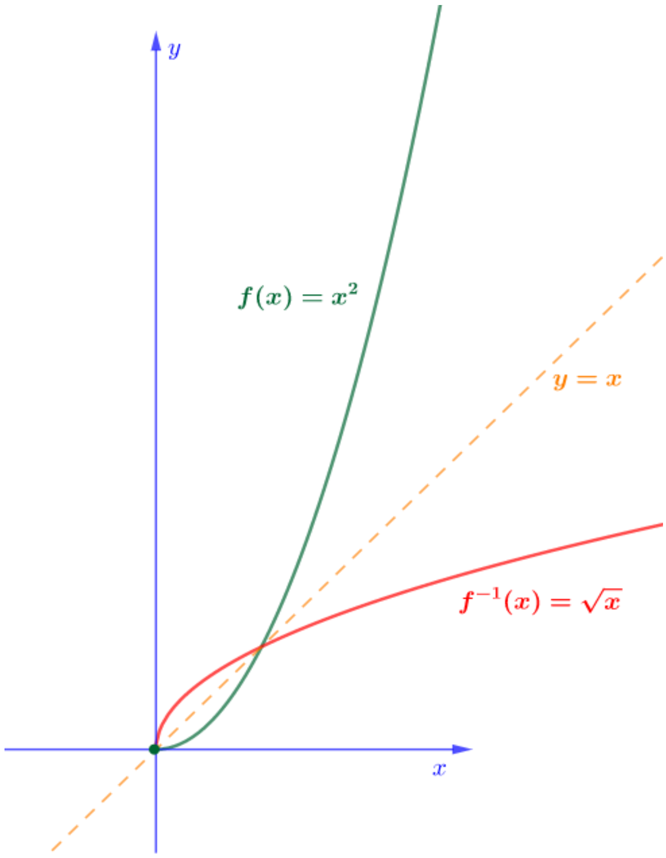
E como se parece o gráfico dessa função inversa?

Bom, a cada número x, associamos sua raiz quadrada, o que dá a seguinte forma ao esboço de nossa função inversa:



TOME NOTA!

Um fato muito interessante é relacionarmos nosso gráfico de função inversa à reta $y = x$, veja:



Há uma simetria entre as funções e suas inversas, sempre com relação à bissetriz dos eixos $y = x$. Essa característica pode facilitar a resolução de algumas questões gráficas nas provas, fique ligado!

1.12. Função Composta

Na prática, a função composta é quando aplicamos uma função a outra função.

Peguemos, com exemplo, duas funções definidas como

$$f(x) = 2x + 5$$

$$g(x) = x^2$$

Se precisarmos calcular $f(x)$ para alguns valores, teremos:

$$f(x) = 2x + 5$$

$$f(3) = 2.3 + 5$$

$$f(-8) = 2.(-8) + 5$$

$$f(200) = 2.200 + 5$$

$$f(\mathrm{a}) = 2.\mathrm{a} + 5$$

$$f(\nabla) = 2.\nabla + 5$$

Não deve ser surpresa que, ao aplicar $f(x)$ a $g(x)$, resulte:

$$f(x) = 2x + 5$$

$$g(x) = x^2$$

$$f(g(x)) = 2.g(x) + 5$$

$$f(g(x)) = 2.x^2 + 5$$

Uma notação alternativa para a função composta é:

$$f(g(x)) = fog(x) = fog$$

cuja leitura é: f composta com g, f bola g, f círculo g, ou ainda, fog (como neblina em inglês).

Podemos, também, fazer o contrário, calcular $gof(x)$, veja:

$$f(x) = 2x + 5$$

$$g(x) = x^2$$

$$gof(x) = g(f(x))$$

$$gof(x) = [f(x)]^2$$

$$gof(x) = [2x + 5]^2$$

$$gof(x) = (2x + 5).(2x + 5)$$

$$gof(x) = 4x^2 + 10x + 10x + 25$$

$$gof(x) = 4x^2 + 20x + 25$$

Portanto, sendo as funções

$$f(x) = 2x + 5$$

$$g(x) = x^2$$

temos

$$fog(x) = 2.x^2 + 5$$

$$gof(x) = 4x^2 + 20x + 25$$

2. Inequações (parte 2)

2.1. Inequação do segundo grau

Com definição dada de forma semelhante às das inequações de primeiro grau, as inequações do segundo grau são inequações que, na sua forma mais reduzida, podem ser representadas por

$$f(x) > 0$$

$$f(x) < 0$$

$$f(x) \geq 0$$

$$f(x) \leq 0$$

onde $f(x)$ é, necessariamente, uma função do **segundo grau**, temos uma inequação do primeiro grau.

A resolução das inequações de segundo grau se resume a dois passos principais:

Reduzir a inequação à sua forma mais simples

Representar um esboço do gráfico de $f(x)$ com suas raízes

Como exemplo, analisemos a inequação do segundo grau

$$x^2 - 5x + 6 \leq 0$$

Inicialmente, não conseguimos simplificar para chegar ao intervalo de valores solicitado, então usaremos a abordagem das funções, considerando

$$f(x) = x^2 - 5x + 6 \leq 0$$

Para esboçarmos o gráfico de $f(x)$ levantamos algumas informações úteis:

Coeficiente $a > 0$, então a parábola tem concavidade para cima

Coeficiente $c = 6$, então a parábola intercepta o eixo vertical em 6

Não sabemos, ainda, as raízes da função $f(x)$, então, vamos calculá-las.

$$f(x) = x^2 - 5x + 6$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4.1.6}}{2.1} = \begin{cases} x' = \dfrac{5+\sqrt{1}}{2} = 3 \\ x'' = \dfrac{5-\sqrt{1}}{2} = 2 \end{cases}$$

Assim, as raízes da função $f(x)$ são $(2;0) e\ (3;0)$.

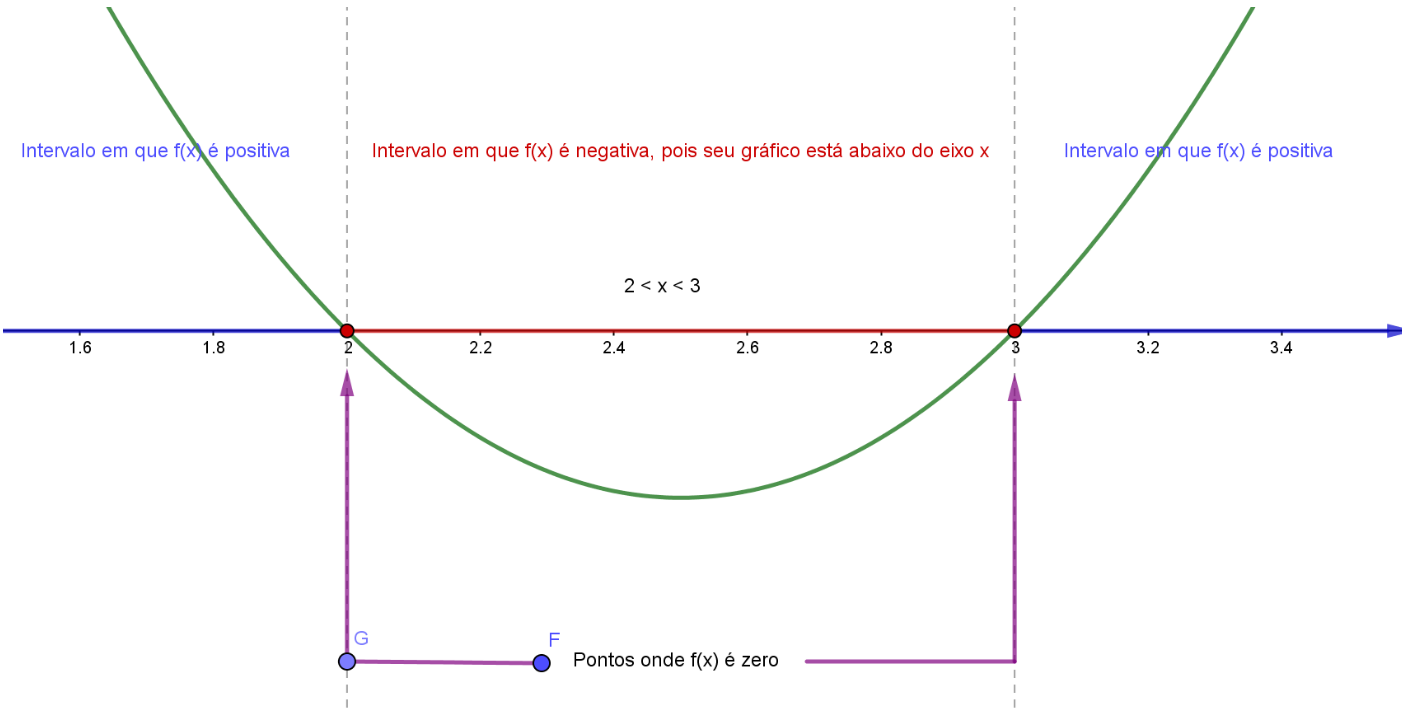
NÃO CONFUNDA!

Cuidado, temos duas raízes, essas raízes têm sempre a coordenada $y = 0$, tome cuidado para não as juntar e formar um ponto só!

Pois bem, já coletamos informações suficientes para a análise da inequação

$$f(x) = x^2 - 5x + 6 \leq 0$$

Com todos esses dados, façamos um esboço do gráfico de $f(x)$



Essa não é a resposta, é apenas um esboço do gráfico compilando as informações que temos acerca de $f(x)$.

Agora é o momento de olharmos para a inequação e entendermos o que ela solicita.

$$f(x) = x^2 - 5x + 6 \leq 0$$

Ela pede os valores que $f(x) \leq 0$, ou seja, que a função seja nula ou seja negativa.

Uma função é nula em suas raízes, que já calculamos, então já temos que $x = 2$ e $x = 3$ fazem parte da resposta.

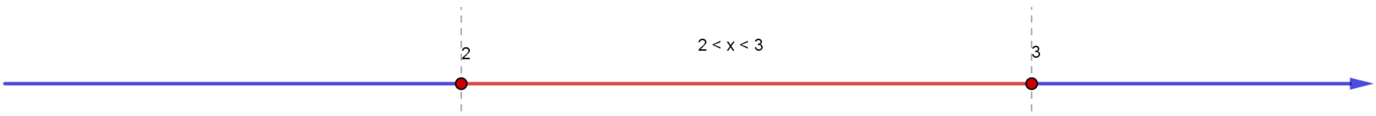
Além disso, pelo gráfico, vimos que $f(x)$ é negativa quando sua linha está abaixo do eixo horizontal. Nesse caso, entre 2 e 3.

Assim, já podemos elaborar nossa resposta. Os valores que satisfazem à inequação do segundo grau estão entre 2 e 3, inclusive seus limites.

Em linguagem algébrica, temos o conjunto solução

$$S = \{x \in \mathbb{R} / 2 \leq x \leq 3\}$$

Ou, se preferir, em linguagem gráfica



2.2. Inequação produto e inequação quociente

Quando temos um produto ou um quociente de funções dentro de uma inequação, temos o que chamamos de inequação produto ou inequação quociente.

As inequações produto são construções do tipo

$$f(x).g(x) > 0$$
$$f(x).g(x) < 0$$
$$f(x).g(x) \geq 0$$
$$f(x).g(x) \leq 0$$

Enquanto as inequações quociente,

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0$$
$$\frac{f(x)}{g(x)} < 0$$
$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$$
$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$$

Podemos ter, inclusive, ambas simultaneamente, algo como uma inequação produto-quociente

$$\frac{f(x).g(x)}{h(x)} > 0$$

Um método muito prático para resolvermos essas inequações consiste em verificar todas as raízes e suas multiplicidades e marcá-las na reta dos reais para análise.

Vamos aprender na prática.

Imaginemos uma situação bem complexa, onde tenhamos

$$\frac{(x-5)^5(2x-6)}{(3x+12)(x^2-5x+6)^3(x^2-x-2)} \geq 0$$

Professor, o que eu te fiz?

Calma, calma. Não é tão complicado quanto parece. Vem comigo.

Vamos seguir passo a passo.

Inicialmente vamos separar todas as funções e calcular suas raízes. Quando tivermos uma função elevado a uma potência, não é necessário fazer o desenvolvimento, basta calcular a raiz da função e contar como multiplicidade igual à potência.

Assim, temos:

$$f(x) = x - 5$$
$$g(x) = 2x - 6$$
$$h(x) = 3x + 12$$
$$j(x) = x^2 - 5x + 6$$
$$k(x) = x^2 - x - 2$$

Calculemos suas raízes, uma a uma, igualando as funções a zero.

$f(x) = x - 5$	$g(x) = 2x - 6$	$h(x) = 3x + 12$
$0 = x - 5$	$0 = 2x - 6$	$0 = 3x + 12$
$5 = x$	$6 = 2x$	$-12 = 3x$
	$3 = x$	$-4 = x$

$$j(x) = x^2 - 5x + 6$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4.1.6}}{2.1} = \begin{cases} x' = \dfrac{5 + \sqrt{1}}{2} = 3 \\ x'' = \dfrac{5 - \sqrt{1}}{2} = 2 \end{cases}$$

$$k(x) = x^2 - x - 2$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1.(-2)}}{2.1} = \begin{cases} x' = \dfrac{1 + \sqrt{9}}{2} = 2 \\ x'' = \dfrac{1 - \sqrt{9}}{2} = -1 \end{cases}$$

Agora é uma hora crucial, contar a multiplicidade das raízes.

Há potências nas funções $f(x)$ e $j(x)$, então:

Função	Raiz	Potência	Multiplicidade
$f(x) = x - 5$	5	5	5
$g(x) = 2x - 6$	3	1	1

$h(x) = 3x + 12$	-4	1	1
$j(x) = x^2 - 5x + 6$	2	3	3
$j(x) = x^2 - 5x + 6$	3	3	3
$k(x) = x^2 - x - 2$	-1	1	1
$k(x) = x^2 - x - 2$	2	1	1

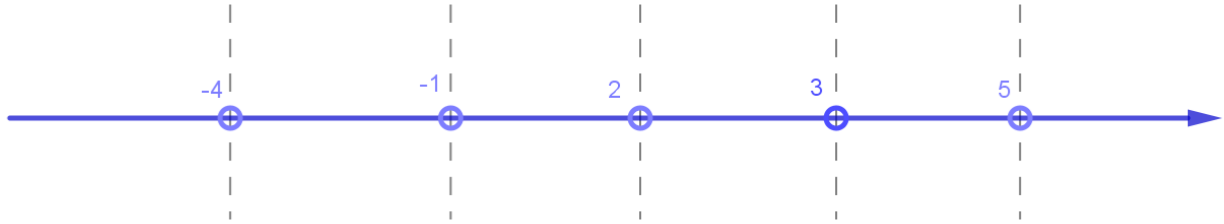
Ufa!

Agora, veja que a raiz 3 aparece tanto em $g(x)$ quanto em $j(x)$, então precisamos somar essas multiplicidades. O mesmo acontece com o 2, que aparece tanto em $j(x)$ quanto em $k(x)$.

Resumindo

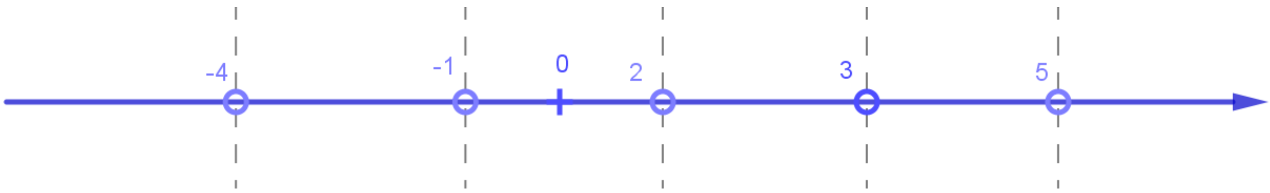
Raízes	Multiplicidade
5	5
3	4
-4	1
2	4
-1	1

Coloquemos essas raízes na reta dos reais. Não é necessário colocá-las em escala, só na ordem correta. Inicialmente deixaremos todas as bolinhas abertas, depois veremos quais das raízes poderão ser incluídas na resposta.



Agora, escolhemos um número de intervalo qualquer para servir de teste. Eu costumo escolher, quando possível, o intervalo que contém o número zero, isso torna os cálculos um pouco mais rápidos. Caso queira escolher um número diferente, sinta-se à vontade. Só não escolha alguma das raízes, ok?

O zero está entre -1 e 2.



Agora, testamos o zero na expressão que contém nossas funções para ver se, naquela região, a expressão é positiva ou negativa.

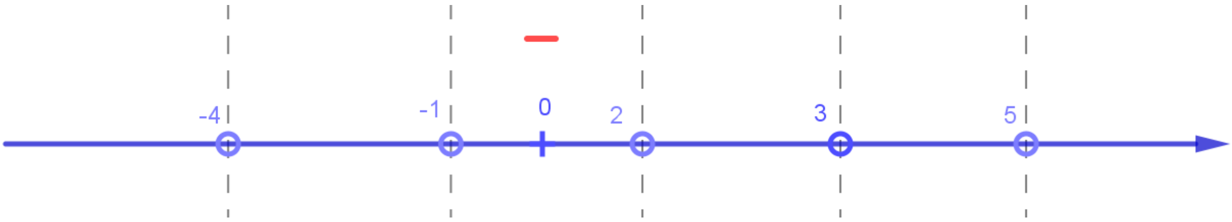
$$\frac{(0-5)^5(2.0-6)}{(3.0+12)(0^2-5.0+6)^3(0^2-0-2)}$$

$$\frac{(-5)^5(-6)}{(12)(6)^3(-2)}$$

Não estamos interessados, agora, no valor da expressão, apenas se ela é positiva ou negativa no intervalo que contém o zero. Assim, podemos pensar somente em termos dos sinais

$$\frac{-.-}{+.+.-}=\frac{+}{-}=-$$

Isso significa que, na região que contém o zero, essa expressão tem valor negativo. Coloquemos essa referência na representação gráfica.



Agora, vamos completar a reta dos reais e, a cada vez que passarmos por uma raiz de multiplicidade ímpar, trocamos de sinal. Quando passarmos por uma raiz de multiplicidade par, mantemos o sinal.

Vamos lá, da região do zero para a direita passaremos

pelo 2 (multiplicidade par),

pelo 3 (multiplicidade par) e

pelo 5 (multiplicidade ímpar).

Reveja o quadro das multiplicidades se ficar em dúvida.

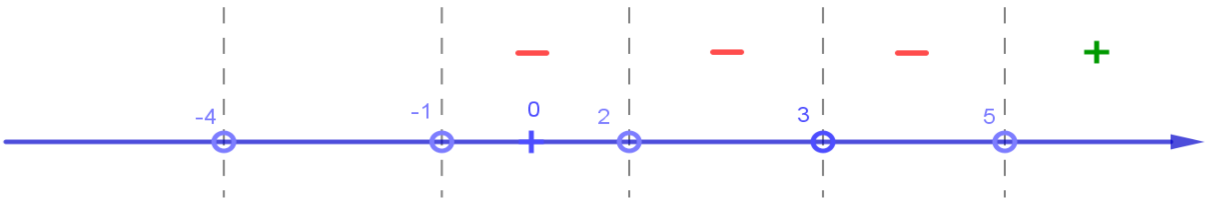
Dessa forma:

Ao passar pelo 2, não mudaremos o sinal, pois ele tem multiplicidade par.

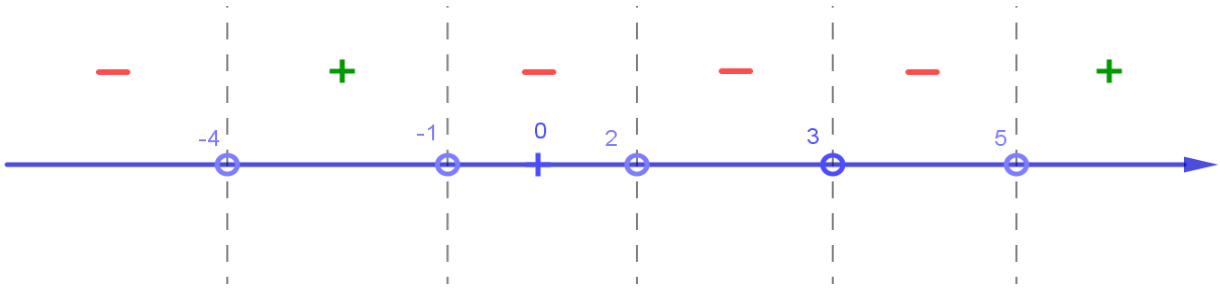
Ao passarmos pelo 3, também não mudaremos, pois ele tem multiplicidade par.

Ao passar pelo 5, alternaremos o sinal, pois o 5 tem multiplicidade ímpar.

Confira.



Agora, para a esquerda, passando pelo -1, e pelo-4. Ambos com multiplicidade ímpar, então é só alternar os sinais a cada raiz.



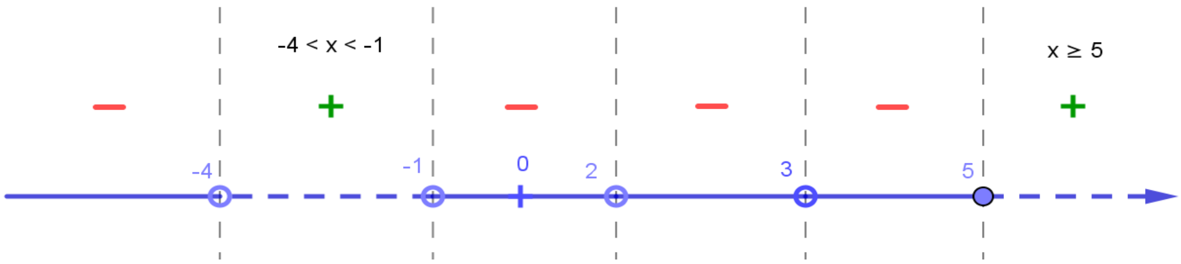
Prontinho, agora sabemos como nossa inequação deve ser respondida. Você se lembra de qual era a pergunta mesmo?

Vamos refrescar a memória.

$$\frac{(x-5)^5(2x-6)}{(3x+12)(x^2-5x+6)^3(x^2-x-2)} \geq 0$$

Nossa inequação está perguntando para quais valores de x esse quociente é maior ou igual a zero. Pois bem, se ele deve ser maior ou igual a zero, queremos os positivos e as raízes. Ótimo.

Só mais um detalhe, não podemos fazer divisões por zero, então, mesmo sendo raízes das funções que separamos, não podem fazer parte da resposta as que forem provenientes do denominador. As raízes envolvidas nos denominadores foram $-4, -1, 2, 3$, então todas elas terão que ser excluídas; bolinha aberta nelas.



Das raízes, apenas o 5 pode ser considerado válido, pois todas as outras apareciam no denominador.

Com base na reta dos reais, conseguimos escrever nosso conjunto solução para a inequação.

$$\frac{(x-5)^5(2x-6)}{(3x+12)(x^2-5x+6)^3(x^2-x-2)} \geq 0$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} | -4 < x < -1 \; ou \; x \geq 5\}$$

Um exercício bastante trabalhoso, mas que tem por finalidade preparar você para os exercícios de prova, sobretudo de segunda fase. Leve seu tempo, analise com cuidado, refaça-o várias vezes até estar bem seguro. Verá que, com a prática, os outros exercícios dessa natureza exigirão cada vez menos esforço.

3. Fórmulas, demonstrações e comentários

3.1. Translação no plano cartesiano

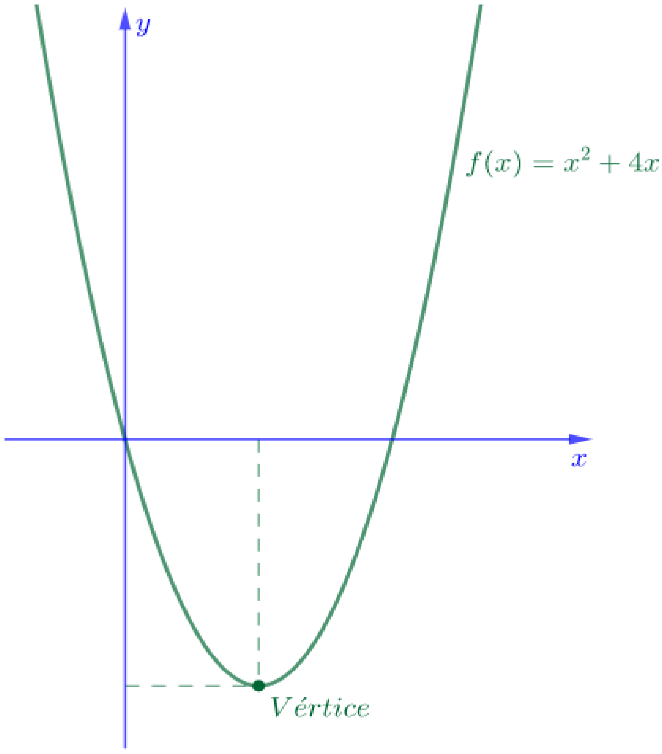
Uma ideia simples, mas que pode facilitar muito sua vida no vestibular: a translação de funções no plano cartesiano.

Vamos estudar duas translações: a vertical e a horizontal.

3.1.1. Translação vertical

Para adicionar ou subtrair um valor a cada um dos pontos de uma função, basta somar ou subtrair esse valor ao termo independente da função, veja:

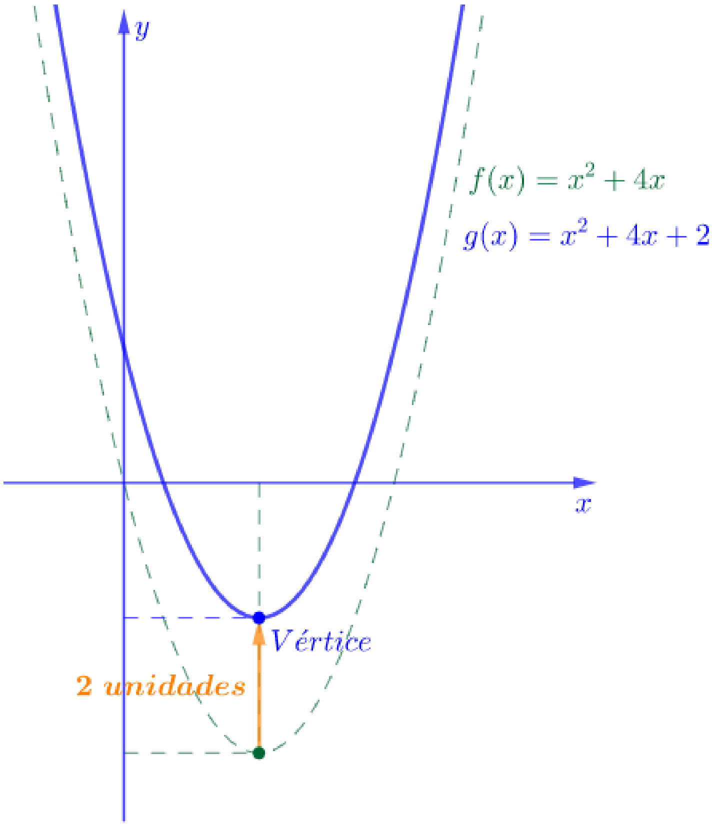
Peguemos a função $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 4x}$ como exemplo. Como vimos, o esboço do gráfico dessa função f é:



Suponha agora que queiramos, por algum motivo, "subir" essa função em, digamos, 2 unidades. Para isso, basta-nos fazer uma nova função

$$g(x) = f(x) + 2$$
$$g(x) = x^2 - 4x + 2$$

Desse modo, todos os pontos de $g(x)$ são, seguramente, superiores em duas unidades aos pontos de $f(x)$. Veja o reflexo disso no gráfico:



3.1.2. Translação horizontal

Já para a translação horizontal, para "levar" a função para a direita ou para a esquerda, devemos substituir a variável independente x por $x \pm h$, onde h representa a quantidade a ser deslocada para a direita ou para a esquerda.

Uma peculiaridade importante. Enquanto no deslocamento vertical, positivo significa deslocamento "acima" e negativo, "abaixo", no deslocamento horizontal o positivo desloca a função para a esquerda e o negativo para a direita.

Sim, eu sei que é contraintuitivo.

Na verdade, estamos deslocando o eixo das ordenadas e, aí, faz mais sentido. No entanto, na hora da prova, sugiro pensar que os eixos não se deslocam e que o deslocamento horizontal funciona contraintuitivamente, ok?

Vejamos como fica na prática.

Vamos deslocar $g(x)$ em três unidades para a direita.

Para isso, precisamos criar uma nova função:

$$i(x) = g(x-3)$$

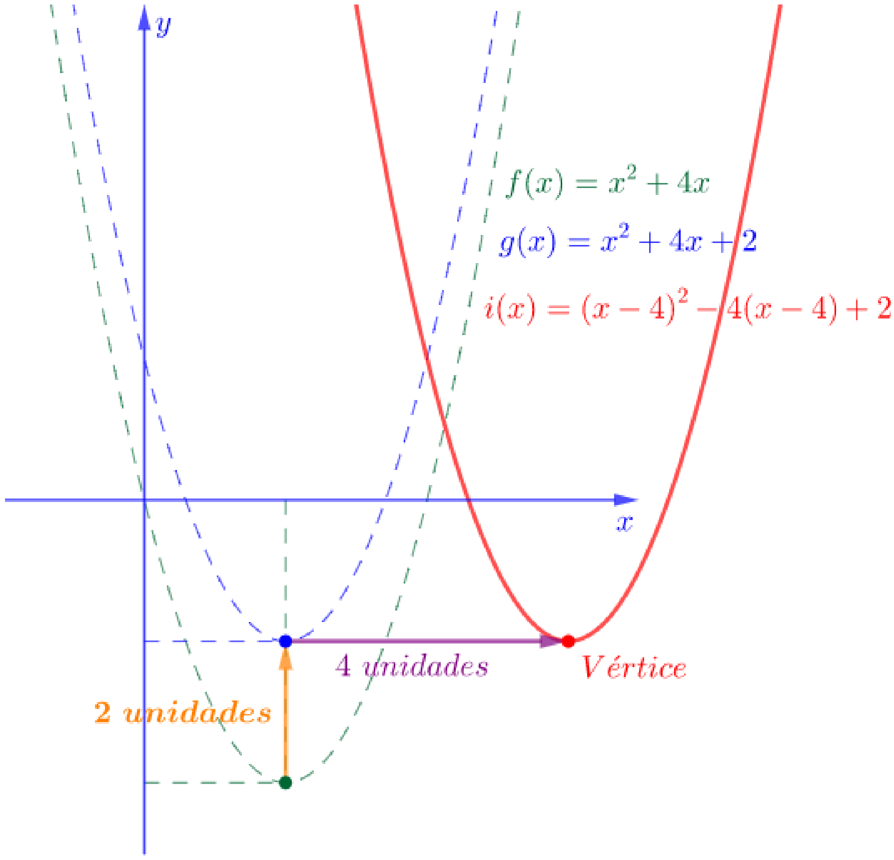
Como

$$g(x) = x^2 - 4x + 2$$

$$i(x) = g(x-3) = (x-3)^2 - 4(x-3) + 2$$

Podemos, claro, expandir e simplificar a equação da função $i(x)$, no entanto, para que tenhamos o deslocamento, a simplificação é irrelevante.

Veja como fica o gráfico de $i(x)$:



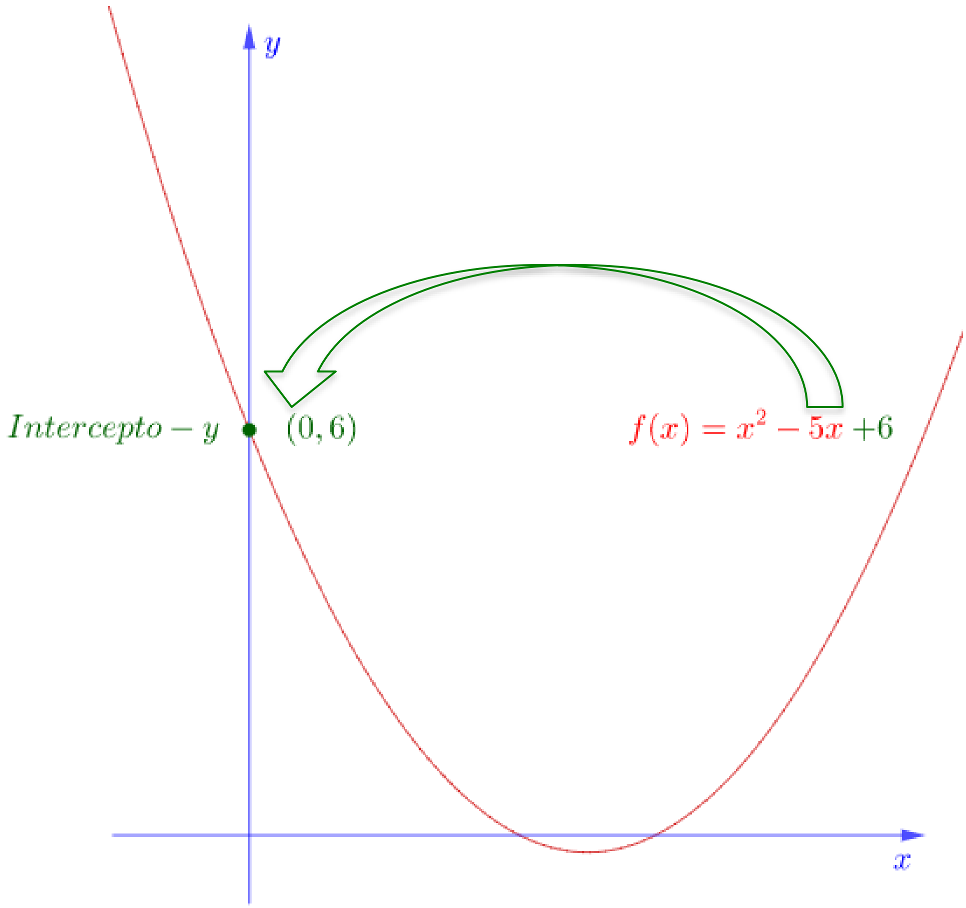
FIQUE ATENTO!

Utilizamos os vértices das funções para explicitar as translações.
No entanto, a translação aconteceu com toda a função e não somente com o vértice. Todos os pontos de cada função foram transladados.

3.2. Intercepto-y

Já vimos que o intercepto-y é o ponto em que o gráfico de uma função intercepta o eixo vertical de um gráfico.

Além disso, em funções polinomiais, o termo independente sinaliza a altura da intersecção, ou seja, a coordenada y do intercepto $(0; y)$.

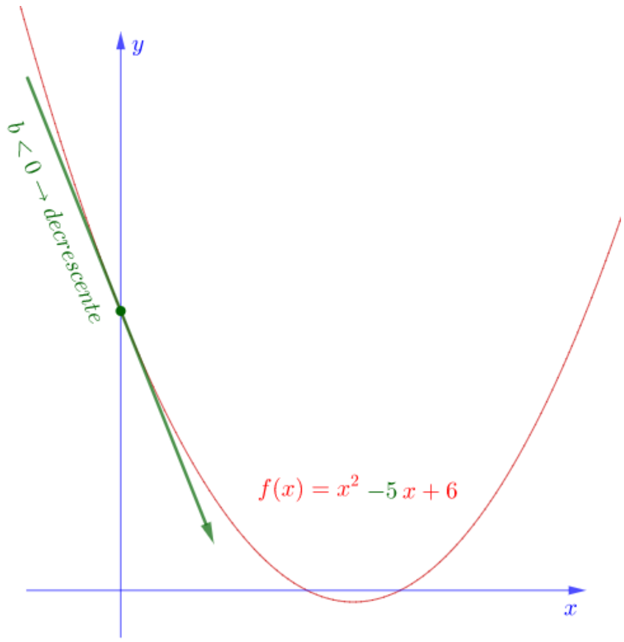


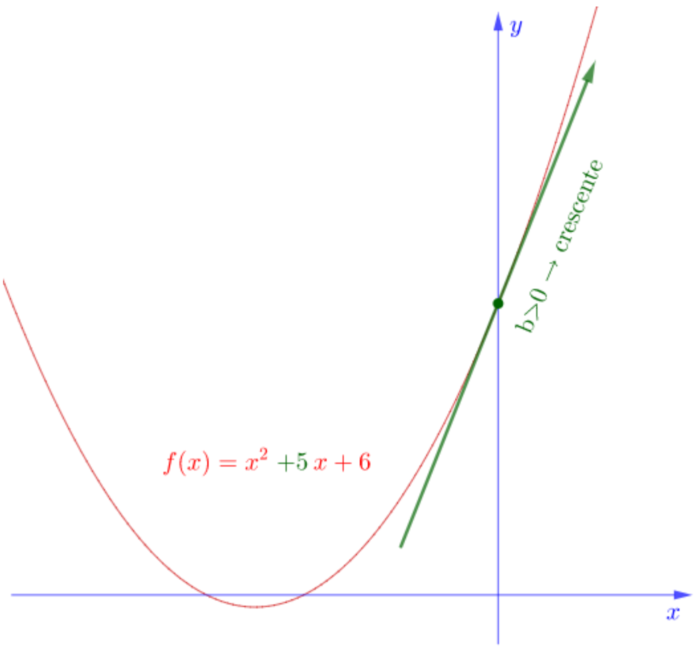
Outro fator importante sobre o intercepto-y em uma função do segundo grau é o sinal do coeficiente b.

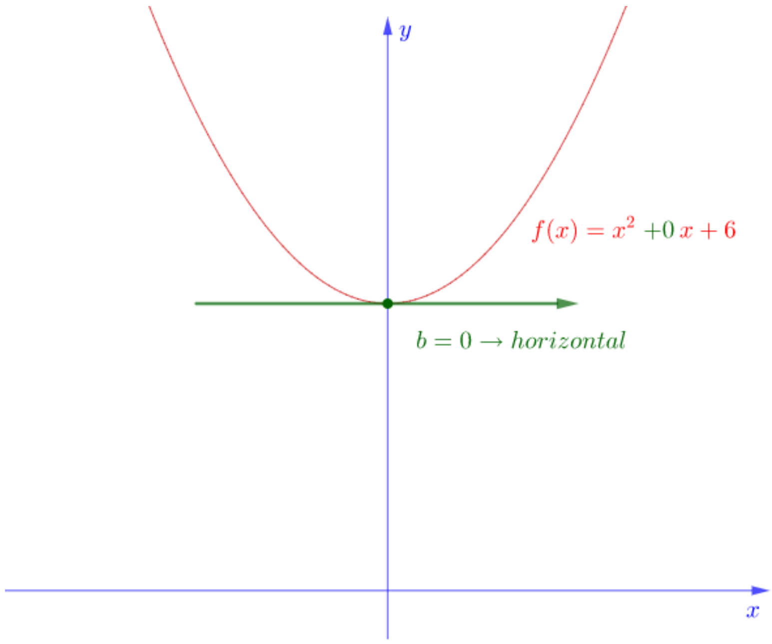
Sinal do coeficiente b — $y = ax^2 + bx + c$

- $b > 0$ — Função corta eixo y de forma crescente
- $b = 0$ — Função corta eixo y de forma horizontal
- $b < 0$ — Função corta eixo y de forma decrescente

Veja os três casos graficamente para o exemplo $f(x) = x^2 + bx + 6$.


y
$b < 0 \rightarrow$ decrescente
$f(x) = x^2 - 5x + 6$
x


y
$b > 0 \rightarrow$ crescente
$f(x) = x^2 + 5x + 6$
x



4. Questões de vestibulares anteriores resolvidas e comentadas

01. (Fuvest/2019)

Se a função $f: \mathbb{R} - \{2\}$ é definida por

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x - 2}$$

E a função $g: \mathbb{R} - \{2\}$ é definida por $g(x) = f(f(x))$, então $g(x)$ é igual a

$a)\ \frac{x}{2}$

$b)\ x^2$

$c)\ 2x$

$d)\ 2x + 3$

$e)\ x$

Comentários

O enunciado define $g(x)$ como

$$g(x) = f(f(x)$$

Como

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x - 2}$$

Temos que

$$g(x) = f(f(x)) = \frac{2f(x)+1}{f(x)-2} = \frac{2\frac{2x+1}{x-2}+1}{\frac{2x+1}{x-2}-2}$$

Simplificando.

$$g(x) = \frac{2\frac{2x+1}{x-2}+1}{\frac{2x+1}{x-2}-2} = \frac{\frac{4x+2}{x-2}+1}{\frac{2x+1}{x-2}-2} = \frac{\frac{4x+2}{x-2}+1}{\frac{2x+1}{x-2}-2} = \frac{\frac{4x+2+x-2}{x-2}}{\frac{2x+1-2x+4}{x-2}}$$

Para divisão entre frações, conservamos a de cima e invertemos a de baixo, lembra?

$$g(x) = \frac{4x+\cancel{2}+x-\cancel{2}}{\cancel{x-2}} \cdot \frac{\cancel{x-2}}{\cancel{2x}+1-\cancel{2x}+4} = \frac{5x}{5} = \frac{\cancel{5}x}{\cancel{5}} = x$$

Gabarito: e)

---

02. (Fuvest/2019)

Considere a função polinomial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que $a, b\ e\ c\ \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. No plano cartesiano xy, a única intersecção da reta $y = 2$ com o gráfico de f é o ponto $(2; 2)$ e a intersecção da reta $x = 0$ com o gráfico de f é o ponto $(0; -6)$. O valor de $a + b + c$ é

a) -2

b) 0

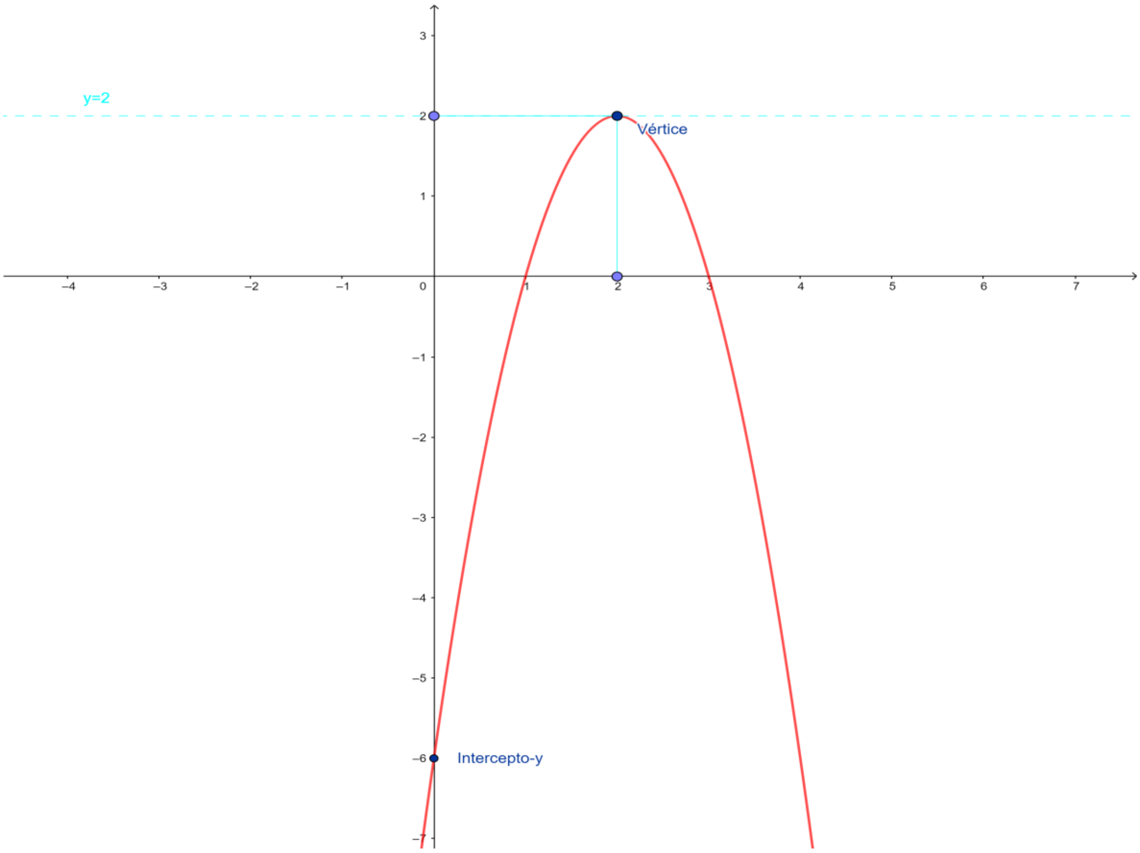
c) 2

d) 4

e) 6

Comentários

Com os dados do enunciado, façamos um esboço do gráfico.



Pensemos, inicialmente, na função

$$f(x) = ax^2$$

Para deslocar essa função 2 unidades para a direita, precisamos substituir x por $x - 2$.

$$f(x) = a(x-2)^2$$

Agora, para "subir" essa função duas unidades, basta somar 2 ao final.

$$f(x) = a(x-2)^2 + 2$$

Para facilitar, vamos desenvolver a expressão.

$$f(x) = a(x-2)^2 + 2$$

$$f(x) = a(x^2 - 4x + 4) + 2$$

$$f(x) = ax^2 - 4ax + 4a + 2$$

Como o termo independente deve valer -6, temos.

$$4a + 2 = -6 \Rightarrow 4a = -8 \Rightarrow a = -2$$

Substituindo $a = -2$ em nossa $f(x)$, temos.

$$f(x) = ax^2 - 4ax + 4a + 2$$

$$f(x) = (-2)x^2 - 4.(-2).x + 4.(-2) + 2$$

$$f(x) = -2x^2 + 8x - 6$$

Assim,

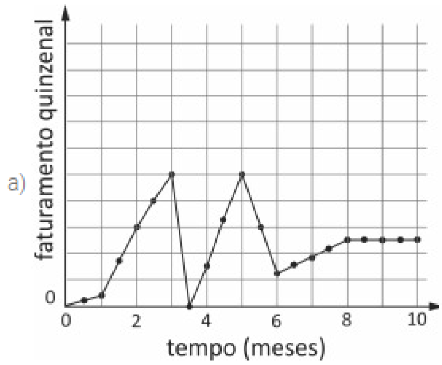
$$a + b + c = -2 + 8 - 6 = 0$$

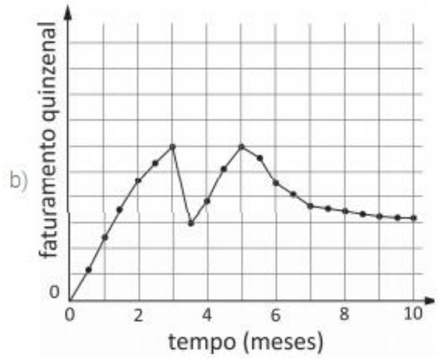
Gabarito: b)

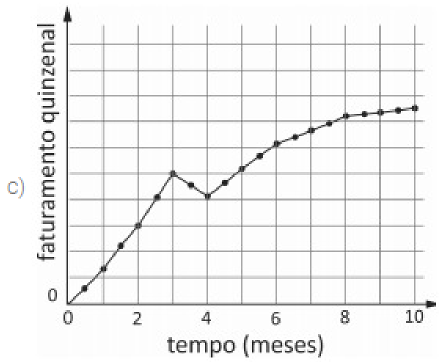
---

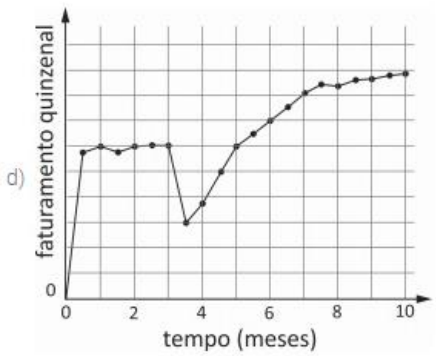
03. (Fuvest/2019)

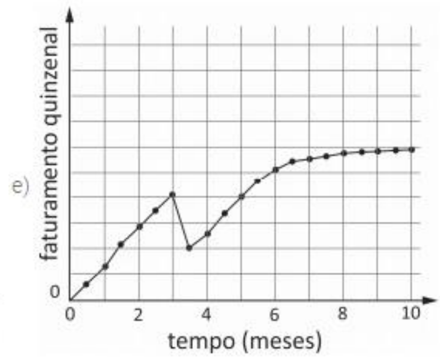
Um dono de restaurante assim descreveu a evolução do faturamento quinzenal de seu negócio, ao longo dos dez primeiros meses após a inauguração: “Até o final dos três primeiros meses, tivemos uma velocidade de crescimento mais ou menos constante, quando então sofremos uma queda abrupta, com o faturamento caindo à metade do que tinha sido atingido. Em seguida, voltamos a crescer, igualando, um mês e meio depois dessa queda, o faturamento obtido ao final do terceiro mês. Agora, ao final do décimo mês, estamos estabilizando o faturamento em um patamar 50% acima do faturamento obtido ao final do terceiro mês”.







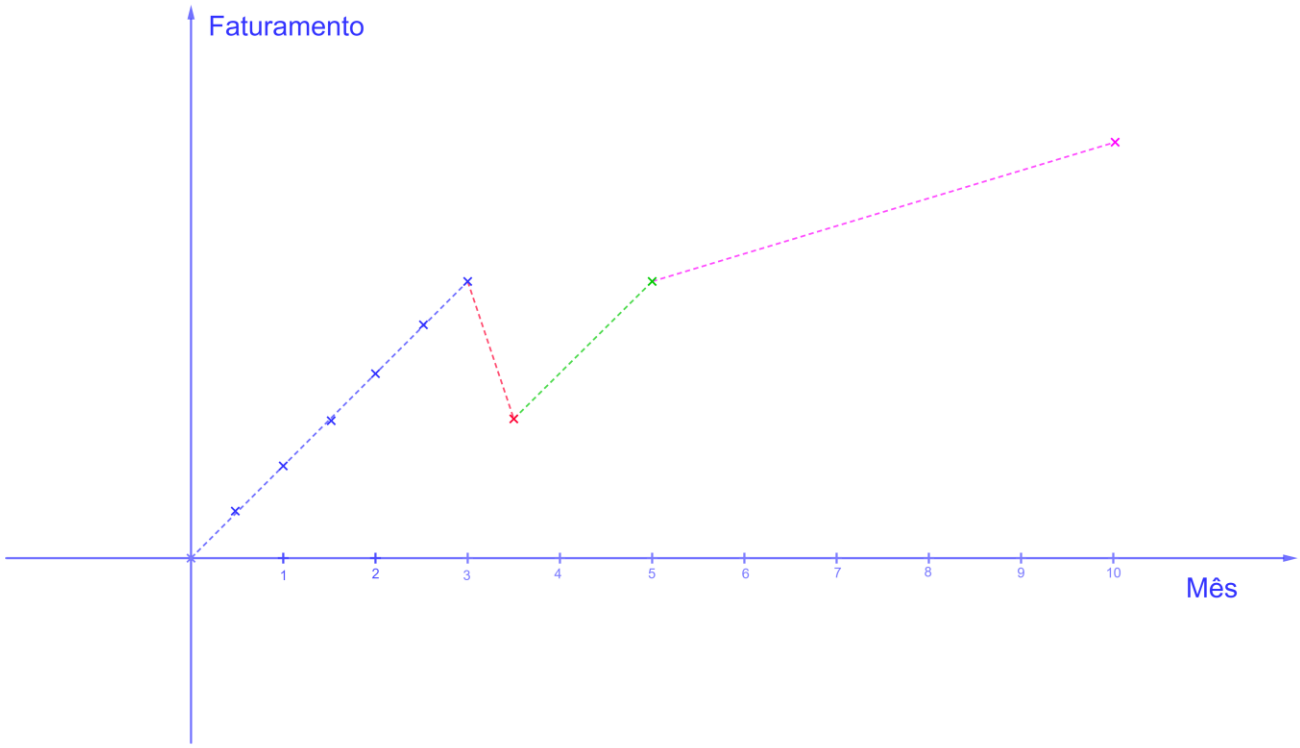




Comentários

Questão puramente interpretativa e de complexidade baixa, visto que não exige cálculos. No entanto, é preciso estar atento para não incorrer em erro.

Quando colocamos no gráfico, item a item, os dados do enunciado, temos.



Cuja semelhança se dá, em maior parte, com o gráfico da última alternativa.

Gabarito: e)

---

04. (Fuvest/2018/modificada)

Sejam D_f e D_g os maiores subconjuntos de $\mathbb{R}$ nos quais estão definidas, respectivamente, as funções reais

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x - 2}} \; e \; g(x) = \frac{\sqrt{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}}{\sqrt{x - 2}}.$$

Nessas condições,

a) $D_f = D_g$.

b) D_f e D_g diferem em apenas um ponto.

c) D_f e D_g diferem em exatamente dois pontos.

d) D_f e D_g não têm pontos em comum.

e) D_f e D_g diferem em mais de um ponto.

Comentários

Para $f(x)$, temos duas condições de existência.

$x - 2 \neq 0$	$\frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x - 2} \geq 0$

Resolvendo a diferença e a desigualdade, temos.

$x \neq 2$	$x \neq 2$

Dessa forma, temos o domínio da função $f(x)$ dado por $D_f = \{x \in \mathbb{R}: x \neq 2\}$.

Pensemos, agora, no domínio da função $g(x)$, que apresenta três condições.

$\sqrt{x-2} \neq 0$	$x - 2 \geq 0$	$x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \geq 0$

Que apresenta os seguintes resultados.

$x \neq 2$	$x \geq 2$	$x = -2 \quad ou \quad x \geq 2$

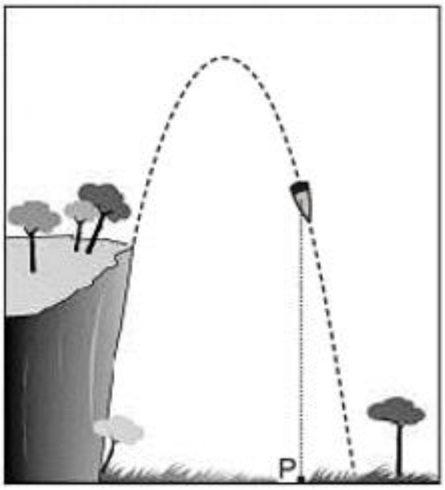
Assim, podemos definir o domínio de $g(x)$ como $D_g = \{x \in \mathbb{R}: x > 2\}$.

Ao analisar as alternativas, vemos que, no que se refere aos domínios, podemos afirmar que D_f e D_g diferem em mais de um ponto.

Gabarito: e)

05. (Fuvest/2015)

A trajetória de um projétil, lançado da beira de um penhasco sobre um terreno plano e horizontal, é parte de uma parábola com eixo de simetria vertical, como ilustrado na figura abaixo. O ponto P sobre o terreno, pé da perpendicular traçada a partir do ponto ocupado pelo projétil, percorre 30m desde o instante do lançamento até o instante em que o projétil atinge o solo. A altura máxima do projétil, de 200m acima do terreno, é atingida no instante em que a distância percorrida por P, a partir do instante do lançamento, é de 10m. Quantos metros acima do terreno estava o projétil quando foi lançado?



a) 60

b) 90

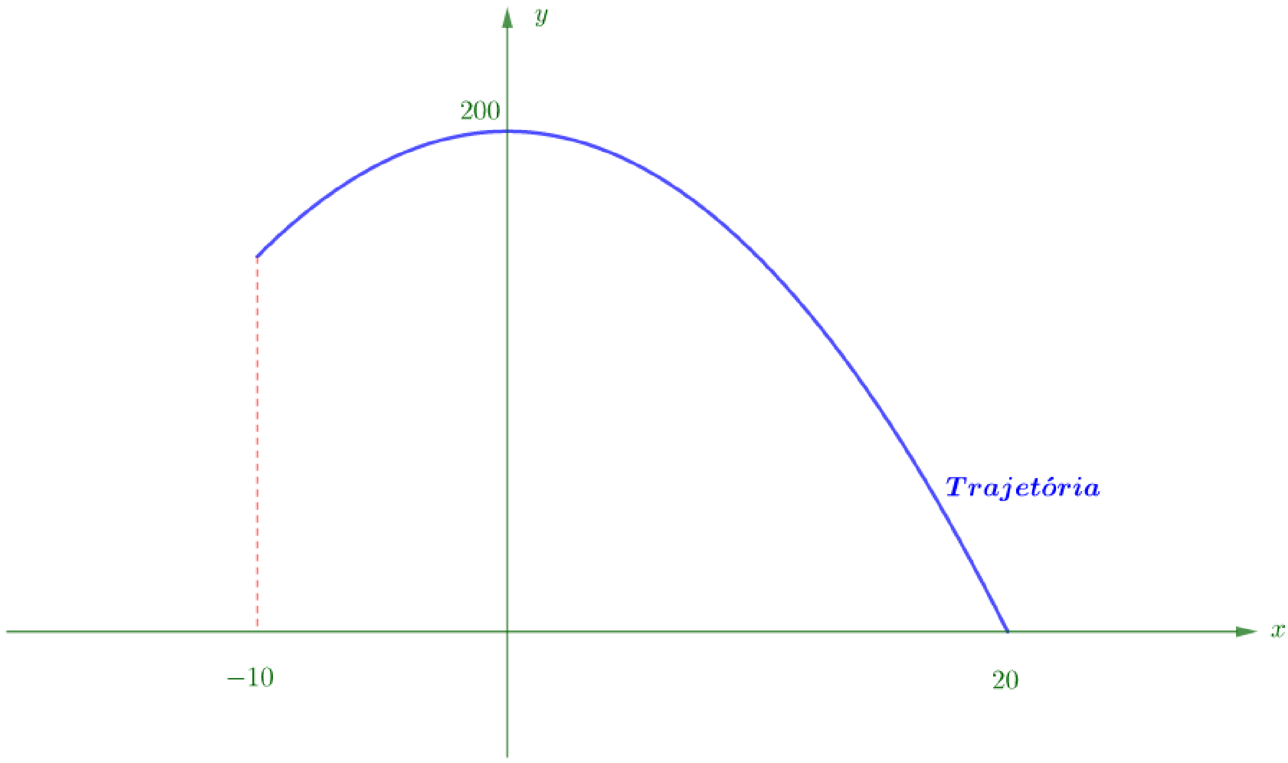
c) 120

d) 150

e) 180

Comentários

Com os dados do enunciado, vamos esboçar, no plano cartesiano, uma parábola que represente a situação.



Já vimos nessa aula que esse tipo de parábola não deve apresentar o termo bx em sua equação, além de apresentar o intercepto-y igual a 200, ou seja, é do tipo

$$y = ax^2 + 200$$

Além disso, a trajetória toca o solo ($y = 0$) no ponto de abscissa $x = 20$. Podemos, então, substituir esses valores na equação da parábola para descobrir o valor do coeficiente a.

$$y = ax^2 + 200$$

$$0 = a.20^2 + 200$$

$$0 = a.400 + 200$$

Subtraindo 200 de ambos os membros:

$$-200 = a.400$$

Dividindo por 400 em ambos os membros:

$$-\frac{200}{400} = \frac{a.\cancel{400}}{\cancel{400}}$$

$$-\frac{1}{2} = a$$

Assim, completamos nossa parábola da trajetória:

$$y = ax^2 + 200$$

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 200$$

Como queremos saber qual é a altura do terreno em relação ao solo e o lançamento ocorreu na posição $x = -10$ em nosso sistema de coordenadas, temos:

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 200 = -\frac{1}{2}(-10)^2 + 200 = -\frac{1}{2}.100 + 200 = -50 + 200 = 150$$

Simbolizando que a altura do terreno, em relação ao solo, é de 150 metros.

Gabarito: d)

---

06. (Fuvest/2015)

A função f está definida da seguinte maneira: para cada inteiro ímpar n,

$$f(x) = \begin{cases} x - (n-1), se\ n - 1 \leq x \leq n \\ n + 1 - x, se\ n \leq x \leq n + 1 \end{cases}$$

a) Esboce o gráfico de f para $0 < x < 6$.

b) Encontre os valores de x, $0 \leq x \leq 6$, tais que $f(x) = {}^{1}/_{5}$.

Comentários

a) Esboce o gráfico de f para $0 < x < 6$.

Como o enunciado disse, a função f é definida por intervalos e o parâmetro n é um número inteiro e ímpar, ou seja, $n \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11 \ldots\}$.

Dessa forma, explicitemos nossa função f para cada n possível.

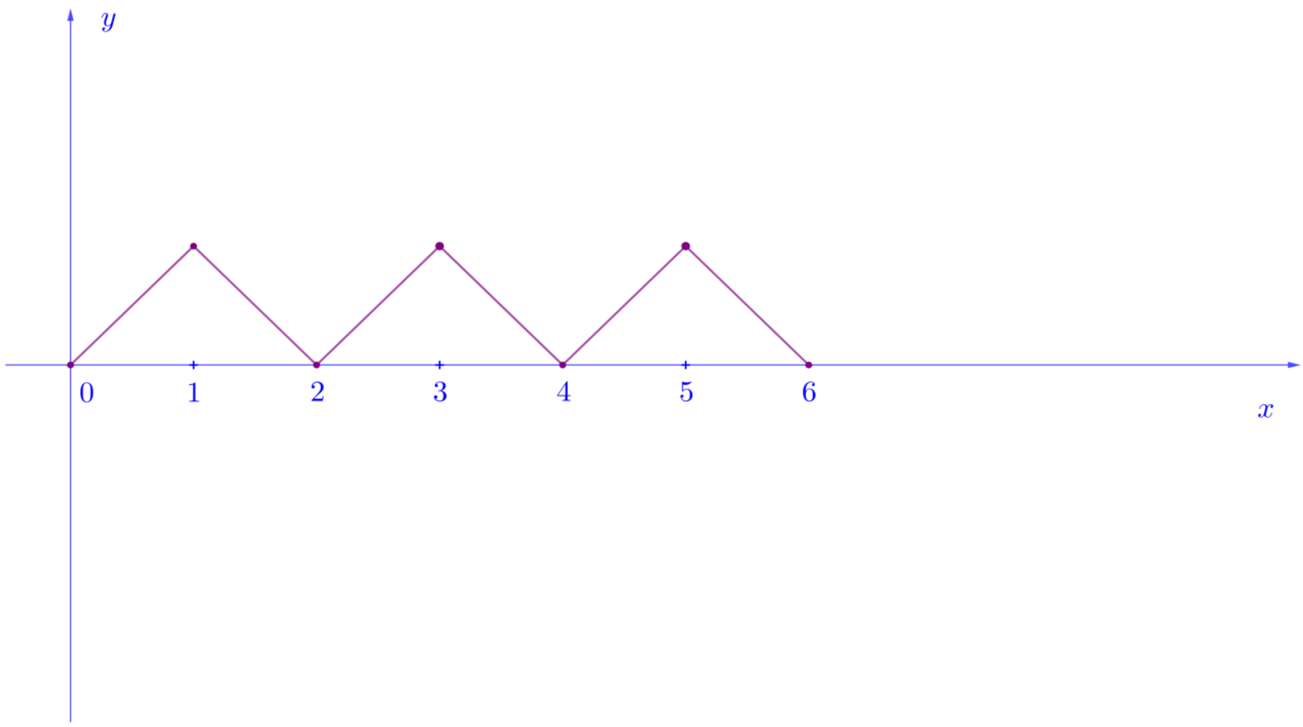
Como $n \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11 \ldots\}$, temos:

$$n = 1 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x - (1 - 1), se\ 1 - 1 \leq x \leq 1 \\ 1 + 1 - x, se\ 1 \leq x \leq 1 + 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x, se\ 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, se\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$n = 3 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x - (3 - 1), se\ 3 - 1 \leq x \leq 3 \\ 3 + 1 - x, se\ 3 \leq x \leq 3 + 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x - 2, se\ 2 \leq x \leq 3 \\ 4 - x, se\ 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

$$n = 5 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x - (5 - 1), se\ 5 - 1 \leq x \leq 5 \\ 5 + 1 - x, se\ 5 \leq x \leq 5 + 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x - 4, se\ 4 \leq x \leq 5 \\ 6 - x, se\ 5 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

Como temos para cada intervalo uma função $f(x)$ bem definida, ampliemos o esboço até o último intervalo $5 \leq x \leq 6$.



Que é o esboço solicitado no item a) da questão.

b) Encontre os valores de x, $0 \leq x \leq 6$, tais que $f(x) = {}^{1}\!/_{5}$.

$0 \leq x \leq 1$	$1 \leq x \leq 2$	$2 \leq x \leq 3$	$3 \leq x \leq 4$	$4 \leq x \leq 5$	$5 \leq x \leq 6$
$x = \frac{1}{5}$	$2 - x = \frac{1}{5}$	$x - 2 = \frac{1}{5}$	$4 - x = \frac{1}{5}$	$x - 4 = \frac{1}{5}$	$6 - x = \frac{1}{5}$
$x = \frac{1}{5}$	$2 - \frac{1}{5} = x$	$x = \frac{1}{5} + 2$	$4 - \frac{1}{5} = x$	$x = \frac{1}{5} + 4$	$6 - \frac{1}{5} = x$
$x = \frac{1}{5}$	$\frac{10 - 1}{5} = x$	$x = \frac{1 + 10}{5}$	$\frac{20 - 1}{5} = x$	$x = \frac{1 + 20}{5}$	$\frac{30 - 1}{5} = x$
$x = \frac{1}{5}$	$\frac{9}{5} = x$	$x = \frac{11}{5}$	$\frac{19}{5} = x$	$x = \frac{21}{5}$	$\frac{29}{5} = x$
$x = 0{,}2$	$1{,}8 = x$	$x = 2{,}2$	$3{,}8 = x$	$x = 4{,}2$	$5{,}8 = x$

07. (Fuvest/2012)

Considere a função

$$f(x) = 1 - \frac{4x}{(x+1)^2}$$

A qual está definida para $x \neq -1$. Então, para todo $x \neq 1$ e $x \neq -1$, o produto $f(x)f(-x)$ é igual a

$a) - 1$ $\quad$ $b)\ 1$ $\quad$ $c)\ x + 1$ $\quad$ $d)\ x^2 + 1$ $\quad$ $e)\ (x-1)^2$

Comentários

Simplificando $f(x)$, temos.

$$f(x) = 1 - \frac{4x}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 4x}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 4x}{(x+1)^2}$$

A expressão $(x+1)^2$ é um produto notável, está lembrado?

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1 - 4x}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 1 - 4x}{(x+1)^2} = \frac{x^2 - 2x + 1}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$$

Com $f(x)$ definida, calculemos $f(-x)$.

$$f(-x) = \frac{(-x-1)^2}{(-x+1)^2} = \frac{[-(x+1)]^2}{(1-x)^2} = \frac{(x+1)^2}{(1-x)^2}$$

Dessa forma, podemos calcular o produto solicitado no enunciado.

$$f(x)f(-x) = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2} \cdot \frac{(x+1)^2}{(1-x)^2} = \frac{\cancel{(x-1)^2}}{\cancel{(x+1)^2}} \cdot \frac{\cancel{(x+1)^2}}{\cancel{(x-1)^2}} = 1$$

Gabarito: b)

---

08. (Fuvest/2011)

Sejam $f(x) = 2x - 9$ e $g(x) = x^2 + 5x + 3$. A soma dos valores absolutos das raízes da equação $f\big(g(x)\big) = g(x)$ é igual a

a) 4

b) 5

c) 6

d) 7

e) 8

Comentários

$$f(x) = 2x - 9$$

$$g(x) = x^2 + 5x + 3$$

$$f\big(g(x)\big) = g(x)$$

$$2g(x) - 9 = g(x)$$

$$2g(x) - g(x) - 9 = 0$$

$$g(x) - 9 = 0$$

$$x^2 + 5x + 3 - 9 = 0$$

$$x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4.1.(-6) = 25 + 24 = 49$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2.1} = \begin{cases} x' = \dfrac{-5+7}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \\ x'' = \dfrac{-5-7}{2} = \dfrac{-12}{2} = -6 \end{cases}$$

$$Soma\ dos\ valores\ brutos\ (sem\ sinal) = 1 + 6 = 7$$

Gabarito: d)

---

09. (Fuvest/2010)

A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem como gráfico uma parábola e satisfaz $f(x+1) - f(x) = 6x - 2$, para todo número real x. Então, o menor valor de $f(x)$ ocorre quando x é igual a

$a)\ \dfrac{11}{6}$

$b)\ \dfrac{7}{6}$

$c)\ \dfrac{5}{6}$

$d)\ 0$

$e)\ -\dfrac{5}{6}$

Comentários

Como $f(x)$ tem como gráfico uma parábola, temos que

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Vamos, então, seguir as orientações acerca da função f e descobrir o que pudermos sobre os coeficientes a, b, c.

$$f(x+1) - f(x) = 6x - 2$$

$$f(x+1) - f(x) = 6x - 2$$

$$a(x+1)^2 + b(x+1) + c - [ax^2 + bx + c] = 6x - 2$$

$$a(x^2 + 2x + 1) + b(x+1) + c - [ax^2 + bx + c] = 6x - 2$$

$$ax^2 + 2ax + a + bx + b + c - ax^2 - bx - c = 6x - 2$$

$$\cancel{ax^2} + 2ax + a \cancel{+bx} + b \cancel{+c} \cancel{-ax^2} \cancel{-bx} \cancel{-c} = 6x - 2$$

$$2ax + a + b = 6x - 2$$

Desse modo:

$$\begin{cases} 2a = 6 \\ a + b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{6}{2} \\ a + b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a + b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ 3 + b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -5 \end{cases}$$

Assim, temos.

$$f(x) = 3x^2 - 5x + c$$

O enunciado pede o valor de x para o menor valor de $f(x)$, ou seja, o x_v.

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-5)}{2.3} = \frac{5}{6}$$

Gabarito: c)

---

10. (Fuvest/2008)

Por recomendação médica, uma pessoa deve fazer, durante um curto período, dieta alimentar que lhe garanta um mínimo diário de 7 miligramas de vitamina A e 60 microgramas de vitamina D, alimentando-se exclusivamente de um iogurte especial e de uma mistura de cereais, acomodada em pacotes. Cada litro de iogurte fornece 1 miligrama de vitamina A e 20 microgramas de vitamina D. Cada pacote de cereais fornece 3 miligramas de vitamina A e 15 microgramas de vitamina D. Consumindo x litros de iogurte e y pacotes de cereais diariamente, a pessoa terá certeza de estar cumprindo a dieta se

$a)\ x + 3y \geq 7\ e\ 20x + 15y \geq 60$

$b)\ x + 3y \leq 7\ e\ 20x + 15y \leq 60$

$c)\ x + 20y \geq 7\ e\ 3x + 15y \geq 60$

$d)\ x + 20y \leq 7\ e\ 3x + 15y \leq 60$

$c)\ x + 15y \geq 7\ e\ 3x + 20y \geq 60$

Comentários

Vamos explicitar as informações do texto em forma de tabela, para uma visão mais panorâmica.

Mínimo diário	1 litro de iogurte especial (x)	Pacote de cereais (y)
Vitamina A	1 mg	$3\ mg$
Vitamina D	20 μg	15 μg

$$Vitamina\ A \rightarrow 1.x + 3.y$$

$$Vitamina\ D \rightarrow 20.x + 15.y$$

Se o enunciado traz que é necessário um mínimo diário de 7 miligramas de vitamina A, simbolizamos essa informação por meio da seguinte inequação:

$$Vitamina\ A \rightarrow 1.x + 3.y \geq 7.$$

O mínimo diário de Vitamina D também é citado como sendo 60 microgramas por dia, o que também pode ser simbolizado por meio de inequação:

$$Vitamina\ D \rightarrow 20.x + 15.y \geq 60$$

Gabarito: a)

---

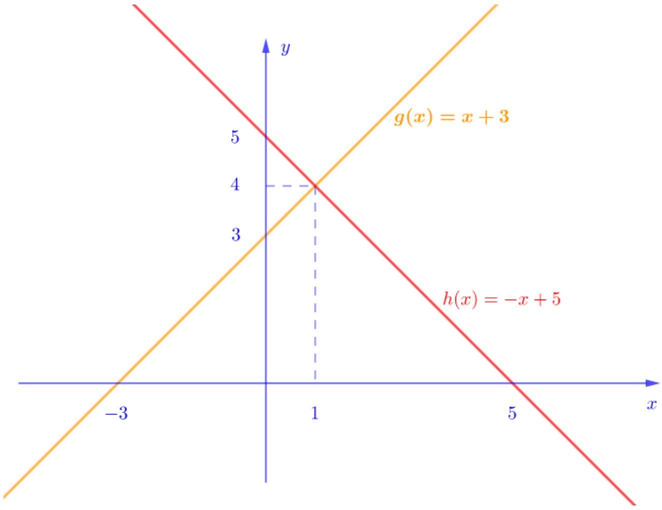
11. (Fuvest/2003)

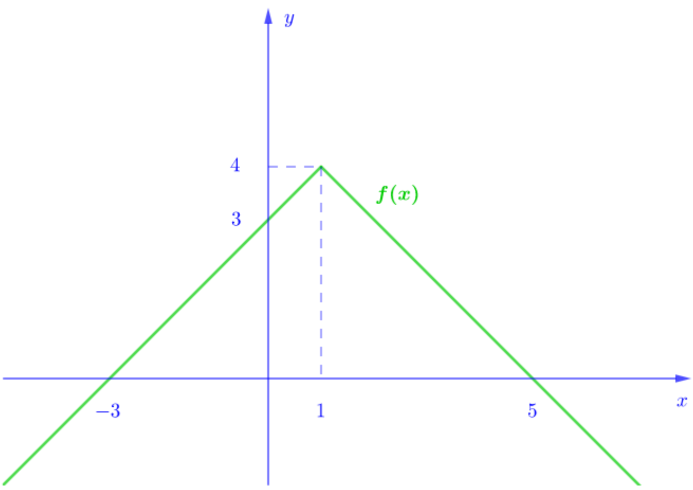
Seja f a função que associa, a cada número real x, o menor dos números $x + 3$ e $-x + 5$. Assim, o valor máximo de $f(x)$ é:

a) 1 b) 2 c) 4 d) 6 e) 7

Comentários

Fazendo o gráfico das duas funções auxiliares e, com ele, associando o menor valor entre elas, temos.





Gabarito: c)

---

12. (Fuvest/2002)

Os pontos $(0{,}0)$ e $(2{,}1)$ estão no gráfico de uma função quadrática f. O mínimo de f é assumido no ponto de abscissa $x = -{}^{1}/_{4}$. Logo, o valor de $f(1)$ é:

$a)\ \frac{1}{10}$ $b)\ \frac{2}{10}$ $c)\ \frac{3}{10}$ $d)\ \frac{4}{10}$ $e)\ \frac{5}{10}$

Comentários

Se a função f é quadrática, é do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$

Se o ponto $(0{,}0)$ pertence ao gráfico de f, temos $c = 0$, portanto, $f(x) = ax^2 + bx$.

Se a função tem o vértice tem coordenada $x_v = -{}^{1}/_{4}$ e uma raiz $(0{,}0)$, a outra raiz deve ser equidistante do x_v, ou seja, $\left(-{}^{1}/_{2}, 0\right)$.

Escrevendo a função na forma fatorada, temos: $f(x) = a(x - x')(x - x'')$.

Como sabemos as raízes, podemos dizer que $x' = 0$ e $x'' = -{}^{1}/_{2}$, ou seja.

$$f(x) = a(x - x')(x - x'')$$

$$f(x) = a(x - 0)\left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$f(x) = ax\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$f(x) = ax^2 + \frac{ax}{2}$$

O enunciado informou que o ponto $(2{,}1)$ pertence à função, então, podemos substituir esse ponto na função e descobrir o valor do coeficiente a.

$$f(x) = ax^2 + \frac{ax}{2}$$

$$1 = a.2^2 + \frac{a \cdot \cancel{2}}{\cancel{2}}$$

$$1 = 4a + a$$

$$1 = 5a$$

$$\frac{1}{5} = a$$

Dessa forma,

$$f(x) = \frac{1}{5}.x^2 + \frac{1}{5}.\frac{x}{2}$$

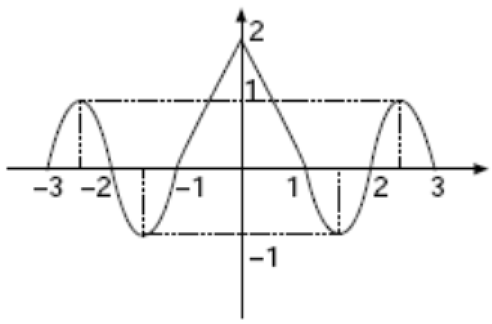
$$f(1) = \frac{1}{5}.1^2 + \frac{1}{10}.1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{2+1}{10} = \frac{3}{10}$$

Gabarito: c)

---

13. (Fuvest/2001)

A função $f(x)$, definida para $-3 \leq x \leq 3$, tem o seguinte gráfico:



onde as linhas ligando $(-1,0)$ a $(0,2)$ e $(0,2)$ a $(1,0)$ são segmentos de reta.

Supondo $a \leq 0$, para que valores de a o gráfico do polinômio $p(x) = a(x^2 - 4)$ intercepta o gráfico de $f(x)$ em exatamente 4 pontos distintos?

$a) -\frac{1}{2} < a < 0$

$b) -1 < a < -\frac{1}{2}$

$c) -\frac{3}{2} < a < -1$

$d) -2 < a < -\frac{3}{2}$

$e)\ a < -2$

Comentários

As raízes de $p(x)$ são tais que

$$a(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{4} \Rightarrow |x| = 2 \Rightarrow x = \pm 2$$

Ou seja, a parábola $p(x)$ já tem dois pontos de intersecção com a função $f(x)$.

Para garantir que $p(x)$ tenha outros dois pontos em comum com a função $f(x)$, basta garantirmos que o vértice de $p(x)$ esteja entre 0 e 2.

$$0 < vértice < 2 \Rightarrow 0 < p(0) < 2 \Rightarrow 0 < a(0^2 - 4) < 2 \Rightarrow 0 < -4a < 2 \Rightarrow$$

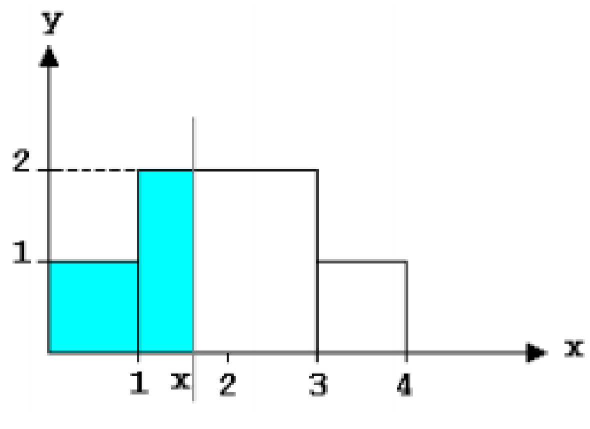
$$\Rightarrow \frac{0}{-4} > \frac{-4a}{-4} > \frac{2}{-4} \Rightarrow 0 > \frac{\cancel{-4}a}{\cancel{-4}} > -\frac{1}{2} \Rightarrow 0 > a > -\frac{1}{2}$$

Gabarito: a)

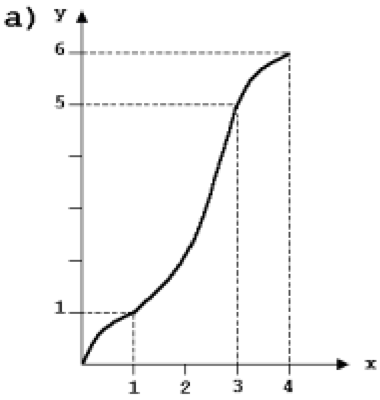
---

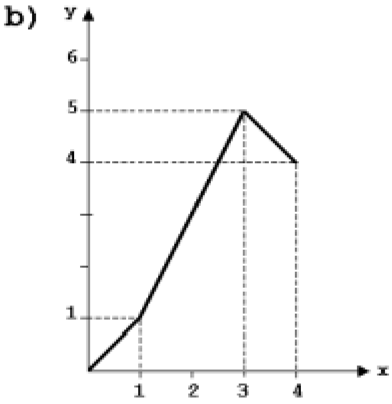
14. (Fuvest/1999)

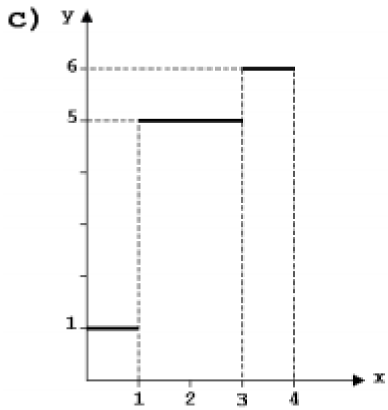
Considere, na figura I a seguir, a área $A(x)$ da região interior à figura formada pelos 3 quadrados e compreendida entre o eixo $0y$ e a reta vertica passando pelo ponto $(x, 0)$.

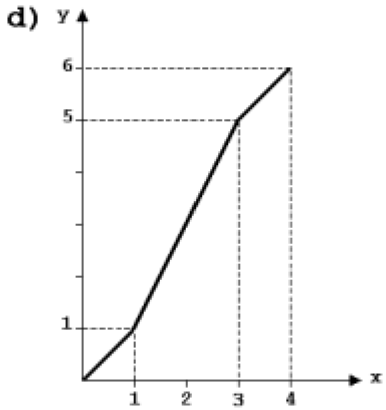


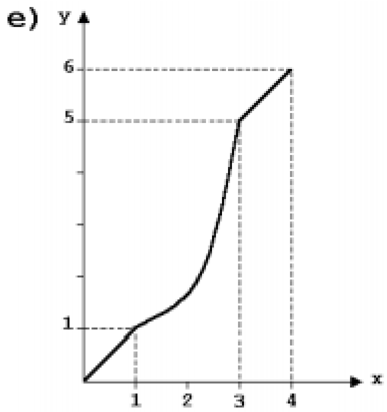
Então o gráfico da função $y = A(x)$, para $0 \leq x \leq 4$, é:







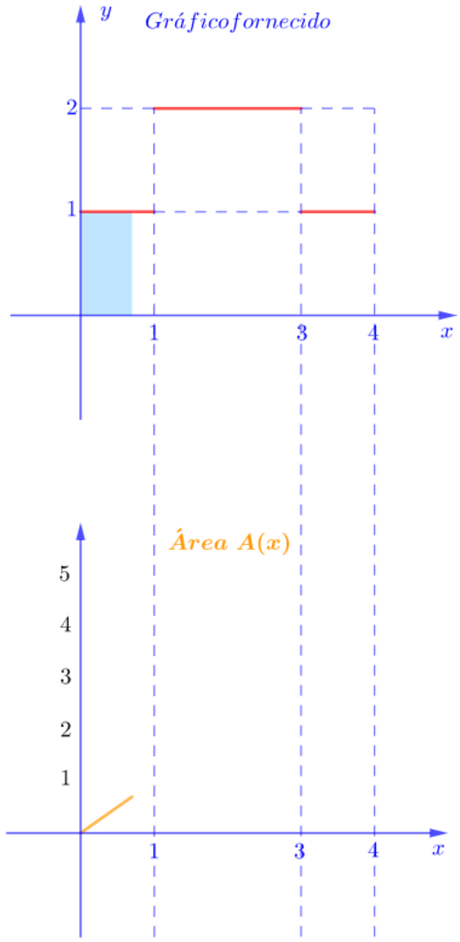


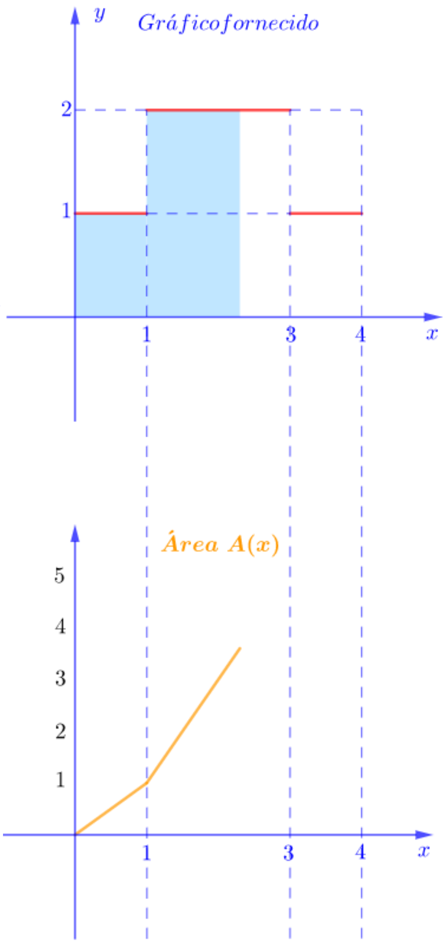


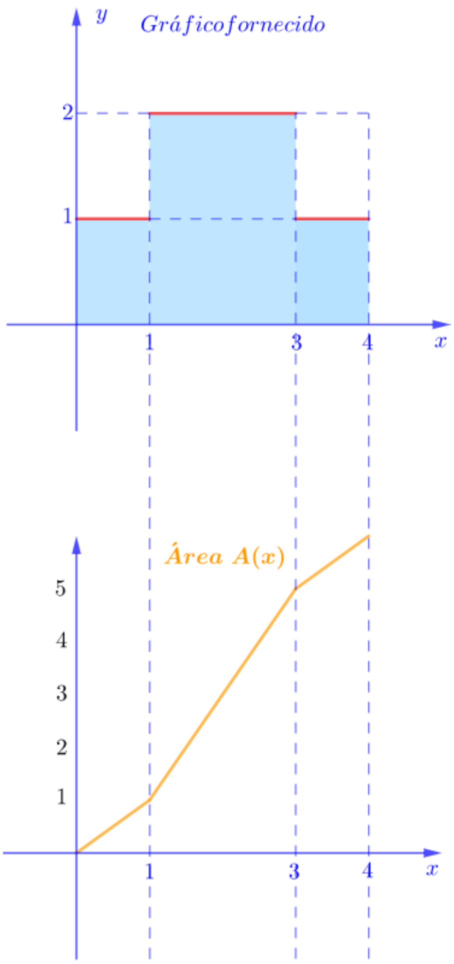
Comentários

Como temos uma altura constante, podemos pensar na fórmula da área da figura como o produto do valor de x pela altura de y.

Fazendo por região, temos:


y
Gráficofornecido
2
1
1
3
4
x
Área A(x)
5
4
3
2
1
1
3
4
x


y
Gráficofornecido
2
1
1
3
4
x
Área A(x)
5
4
3
2
1
1
3
4
x


y
Gráficofornecido
2
1
1
3
4
x
Área A(x)
5
4
3
2
1
1
3
4
x

Gabarito: d)

---

15. (Fuvest/1997)

Para que a parábola $y = 2x^2 + mx + 5$ não intercepte a reta $y = 3$, devemos ter

$a) -4 < m < 4$ $\quad$ $b)\ m < 3\ ou\ m > 4$ $\quad$ $c)\ m > 5\ ou\ m < -5$

$d)\ m = -5\ ou\ m = 5$ $\quad$ $e)\ m \neq 0$

Comentários

Para que a intersecção não aconteça, precisamos que o vértice de y esteja acima de $y = 3$, ou seja,

$$y_v > 3 \Rightarrow -\frac{\Delta}{4a} > 3 \Rightarrow -\frac{m^2 - 4.2.5}{4.2} > 3 \Rightarrow \frac{40 - m^2}{8} > 3 \Rightarrow \frac{40 - m^2}{\cancel{8}}.\cancel{8} > 3.8 \Rightarrow$$

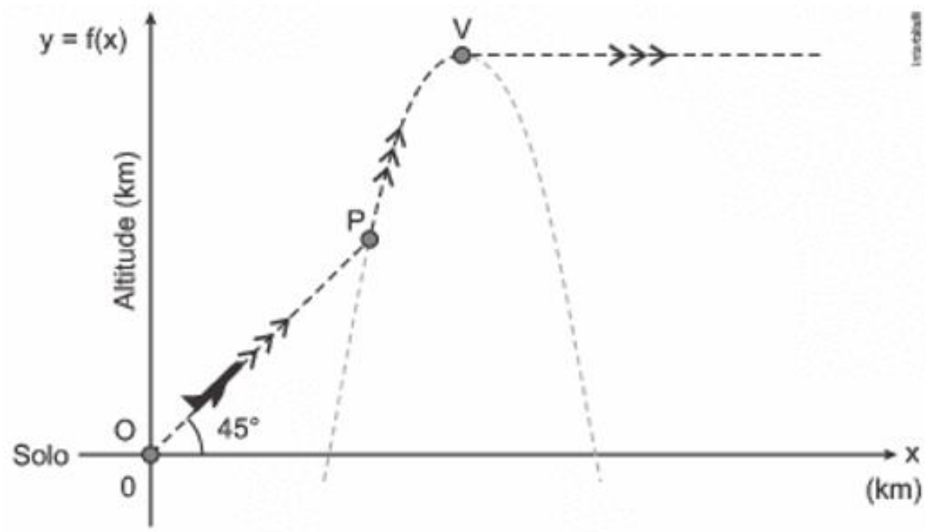
$$\Rightarrow 40 - m^2 > 24 \Rightarrow 16 - m^2 > 0 \Rightarrow -4 < m < 4$$

Gabarito: a)

---

1. (Unesp/2019)

Em relação a um sistema cartesiano de eixos ortogonais com origem em $O(0,0)$, um avião se desloca, em linha reta, de O até o ponto P, mantendo sempre um ângulo de inclinação de 45° com a horizontal. A partir de P, o avião inicia trajetória parabólica, dada pela função $f(x) = -x^2 + 14x - 40$, com x e $f(x)$ em quilômetros. Ao atingir o ponto mais alto da trajetória parabólica, no ponto V, o avião passa a se deslocar com altitude constante em relação ao solo, representado na figura pelo eixo x.



Em relação ao solo, do ponto P para o ponto V, a altitude do avião aumentou

a) 2,5 km. b) 3 km. c) 3,5 km. d) 4 km. e) 4,5 km.

Comentários

O encontro entre a trajetória retilínea e a parabólica ocorre quando

$$-x^2 + 14x - 40 = x$$

$$-x^2 + 13x - 40 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 13^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-40) = 169 - 160 = 9$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{-13 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot (-1)} \Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{-13+3}{-2} = 5 \rightarrow 1° \, encontro = ponto \, P \\ x'' = \dfrac{-13-3}{-2} = 8 \rightarrow 2° \, encontro, não \, está \, no \, problema \end{cases}$$

Altura do ponto P:

$$f(x) = -x^2 + 14x - 40$$

$$f(5) = -5^2 + 14 \cdot 5 - 40$$

$$f(5) = -25 + 70 - 40$$

$$f(5) = 5 \, km$$

Altura máxima, vértice da parábola.

$$f(x) = -x^2 + 14x - 40$$

$$Y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}{4a} = -\frac{14^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-40)}{4 \cdot (-1)} = -\frac{196 - 160}{-4} = -\frac{36}{-4} = 9$$

Assim, a diferença entre a altura do ponto P e a altura máxima da parábola é dada por:

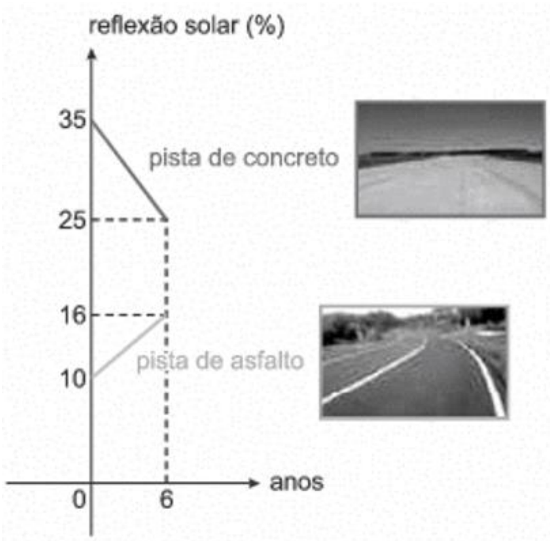
$$9 - 5 = 4 \, km$$

Gabarito: d)

---

2. (Unesp/2018)

Dois dos materiais mais utilizados para fazer pistas de rodagem de veículos são o concreto e o asfalto. Uma pista nova de concreto reflete mais os raios solares do que uma pista nova de asfalto; porém, com os anos de uso, ambas tendem a refletir a mesma porcentagem de raios solares, conforme mostram os segmentos de retas nos gráficos.



(www.epa.gov. Adaptado.)

Mantidas as relações lineares expressas nos gráficos ao longo dos anos de uso, duas pistas novas, uma de concreto e outra de asfalto, atingirão pela primeira vez a mesma porcentagem de reflexão dos raios solares após

a) 8,225 anos. b) 9,375 anos. c) 10,025 anos. d) 10,175 anos. e) 9,625 anos.

Comentários

Considerando a reflexão solar como nosso eixo y e os anos como nosso eixo x, temos a reflexão da pista de concreto y_c e a reflexão da pista de asfalto y_a dadas por:

$$y_c = -\frac{10}{6}x + 35$$

$$y_a = \frac{6}{6}x + 10$$

As reflexões terão a mesma porcentagem quando

$$y_a = y_c$$

$$\frac{6}{6}x + 10 = -\frac{10}{6}x + 35 \Rightarrow \frac{6}{6}x + \frac{10}{6}x = -10 + 35 \Rightarrow \frac{16}{6}x = 25 \Rightarrow x = \frac{25 \cdot 6}{16} \Rightarrow x = 9{,}375$$

Gabarito: b)

---

5. Considerações finais

Percebeu o quanto usamos os conhecimentos básicos nessa aula? Frações, fatorações, MMC e Bhaskara estão sempre presentes.

Pois é, isso acontecerá também nas próximas, são conteúdos extremamente relevantes para continuarmos avançando.

A matemática é cumulativa e cada item que vemos poderá (e será) usado nos próximos passos. Revise sempre os conteúdos vistos e siga firme no seu plano de estudos.

O primeiro passo foi dado e seu sucesso depende de você.

Para acessar o curso intensivo completo para a Fuvest 2020, clique aqui.

Além disso, você pôde perceber que, ao final da lista de exercícios, trouxemos duas questões do vestibular da Unesp. Note que existem semelhanças e diferenças entre a prova feita pela Fuvest e a prova feita pela Unesp, sobretudo nos quesitos tecnicidade e contextualização. Embora a matéria seja a mesma, as questões seguem tendências diferentes.

Se você tem interesse na Unesp, nós também preparamos um curso específico para você, confira aqui.

Independente da banca de seu vestibular, ao estudar matemática, não deixe dúvidas; uma base sólida de conceitos é o caminho para uma boa prova.

Estude as resoluções dos exercícios após a leitura da teoria e tente resolver os exercícios de modo autônomo.

Havendo problemas, já sabe, estamos aqui para ajudar você. Poste no site, na área do aluno, utilize os canais de atendimento do Estratégia, só não deixe conteúdo para trás.

Um forte abraço e até a próxima aula.

FALE COMIGO

/professormarcal /professor.marcal /professormarcal