Correção Matemática 1ª Fase - IME

IME 2020

Professor Victor So

PROVA IME RESOLVIDA E COMENTADA

1.

Seja U o conjunto dos 1000 primeiros números naturais maiores que zero. Considere que zeros à esquerda são omitidos. Seja $A \subseteq U$ o conjunto de números cuja representação na base 10 tem o algarismo mais significativo igual a 1; e $B \subseteq U$ o conjunto de números cuja representação na base 4 tem o algarismo mais significativo igual a 2. As cardinalidades de $A - B$ e de $B - A$ são, respectivamente:

(A) 46 e 277

(B) 45 e 275

(C) 44 e 275

(D) 45 e 277

(E) 46 e 275

Observação:

- cardinalidade de um conjunto finito é o número de elementos distintos desse conjunto.

Comentários

Para resolver essa questão, devemos encontrar os elementos de cada conjunto. O enunciado diz que A e B são subconjuntos de $U = \{1, 2, 3, \dots, 1000\}$. Para A, temos que o algarismo mais significativo dos seus elementos na base decimal é 1, logo, os elementos de A são:

$$\begin{matrix} 1 \\ 10, \dots, 19 \\ 100, \dots, 199 \\ 1000 \end{matrix} \Rightarrow \boxed{A = \left\{1, \underbrace{10, \dots, 19}_{10\ elementos}, \underbrace{100, \dots, 199}_{100\ elementos}, 1000\right\}}$$

A cardinalidade do conjunto A é:

$$\boxed{n(A) = 1 + 10 + 100 + 1 = 112}$$

Vamos analisar o conjunto B. Ele é formado pelos números cuja representação na base 4 tem o algarismo mais significativo igual a 2, desse modo, temos que os elementos de B são (lembrando que um número na base 4 pode ter como algarismos $0, 1, 2, 3$):

$$B = \left\{\begin{matrix} (2)_4 \\ (20)_4, (21)_4, (22)_4, (23)_4 \\ (200)_4, \dots, (233)_4 \\ (2000)_4, \dots, (2333)_4 \\ (20000)_4, \dots, (23333)_4 \end{matrix}\right\}$$

Perceba que $(20000)_4 = 2 \cdot 4^4 = 512$ e $(200000)_4 = 2 \cdot 4^5 = 2048 > 1000$.

Para analisarmos a cardinalidade das diferenças de A e B, vamos converter os números de B e escrevê-los na base decimal:

$$(2)_4 \Rightarrow 2$$

$$\underbrace{(20)_4}_{2\cdot 4=8}, (21)_4, (22)_4, \underbrace{(23)_4}_{(30)_4-1=3\cdot 4-1=11} \Rightarrow 8, \dots, 11$$

$$\underbrace{(200)_4}_{2\cdot 4^2=32}, \dots, \underbrace{(233)_4}_{(300)_4=3\cdot 4^2-1=47} \Rightarrow 32, \dots, 47$$

$$\underbrace{(2000)_4}_{2\cdot 4^3=128}, \dots, \underbrace{(2333)_4}_{(3000)_4-1=3\cdot 4^3-1=191} \Rightarrow 128, \dots, 191$$

$$\underbrace{(20000)_4}_{2\cdot 4^4=512}, \dots, \underbrace{(23333)_4}_{(30000)_4-1=3\cdot 4^2-1=767} \Rightarrow 512, \dots, 767$$

Assim, o conjunto B é dado por:

$$\boxed{B = \left\{2, \underbrace{8, \dots, 11}_{4\ elementos}, \underbrace{32, \dots, 47}_{16\ elementos}, \underbrace{128, \dots, 191}_{64\ elementos}, \underbrace{512, \dots, 767}_{256\ elementos}\right\}}$$

$$\Rightarrow \boxed{n(B) = 1 + 4 + 16 + 64 + 256 = 341}$$

Resta analisar os elementos da intersecção dos conjuntos. Fazendo a intersecção de A com B:

$$A \cap B = \left\{10, 11, \underbrace{128, \dots, 191}_{64\ elementos}\right\}$$

$$\boxed{n(A \cap B) = 66}$$

Portanto, as cardinalidades das diferenças são dadas por:

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 112 - 66 = 46$$

$$n(B - A) = 341 - 66 = 275$$

Gabarito: “e”.

2.

O menor número natural ímpar que possui o mesmo número de divisores que 1800 está no intervalo:

(A) $[1, 16000]$

(B) $[16001, 17000]$

(C) $[17001, 18000]$

(D) $[18001, 19000]$

(E) $[19001, \infty)$

Comentários

Inicialmente, vamos calcular o número de divisores de 1800. Para isso, vamos fatorá-lo:

$$\begin{array}{l|l} 1800 & 2 \\ 900 & 2 \\ 450 & 2 \\ 225 & 3 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$1800 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$

O número de divisores de 1800 é dado pelo produto dos expoentes dos seus fatores somado a 1:

$$n_D = (3+1)(2+1)(2+1) = 36$$

Assim, temos 36 divisores para o número 1800. O menor número natural ímpar que possui 36 divisores é da forma (lembrando que 2 não pode ser um fator desse número para que ele seja ímpar):

$$I = 3^a \cdot 5^b \cdot 7^c \cdot 11^d \cdot \ldots$$

Ela deve satisfazer:

$$(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)\ldots = 36$$

Vamos fatorar o número 36 e ver as possibilidades:

$$36 = \begin{cases} 36 \cdot 1 \\ 18 \cdot 2 \\ 9 \cdot 4 \\ 3 \cdot 12 \\ 3 \cdot 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \\ 6 \cdot 6 \\ 2 \cdot 3 \cdot 6 \end{cases}$$

Analisaremos apenas as possibilidades em azul, pois as possibilidades em vermelho gerarão números muito grandes. Para que tenhamos o menor ímpar, os menores fatores devem receber os maiores expoentes, logo:

$$3 \cdot 3 \cdot 4 \Rightarrow 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 21$$

$$3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \Rightarrow 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^1 \cdot 11^1 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$$

$$2 \cdot 3 \cdot 6 \Rightarrow 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7^1 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 27$$

Note que o menor número é $3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 = 17325$.

Gabarito: “c”.

3.

Considere os conjuntos A = {0, 1, 2, 3, 4} e B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}. Seja F o conjunto de funções cujo domínio é A e cujo contradomínio é B. Escolhendo-se ao acaso uma função f de F, a probabilidade de f ser estritamente crescente ou ser injetora é:

(A) 0,00252

(B) 0,00462

(C) 0,25200

(D) 0,30240

(E) 0,55440

Comentários

O detalhe nessa questão é perceber que as funções estritamente crescentes também são funções injetoras, ou seja, a probabilidade pedida é igual ao número de funções injetoras de $F: A \to B$ sobre o número total de possibilidades. Desse modo:

$$p = \frac{número\ de\ casos\ favoráveis}{número\ de\ casos\ possíveis}$$

Para uma função ser injetora, temos que cada elemento do domínio A deve indicar um elemento distinto no contradomínio B. Assim, dos 10 elementos de B, escolhemos 5 para compor os pares com os elementos de A, logo, temos $\binom{10}{5}$ possibilidades. Além disso, podemos permutar essas possibilidades, logo:

$$n_{favoráveis} = \binom{10}{5} \cdot 5!$$

O número de casos possíveis é dado por 10^5. Com isso, a probabilidade pedida é:

$$p = \frac{\binom{10}{5} \cdot 5!}{10^5} = \frac{\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5!} \cdot 5!}{10^5} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{10^4} = 0{,}3024$$

Gabarito: “d”.

4.

Sabe-se que $S = x + y + z$, onde y e z são soluções inteiras do sistema abaixo.

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt[3]{2y^2}}{2} \\ y = e^{2\ln(x)} \\ \log_2 y + \log_x z = (x+3) \end{cases}$$

O valor de S é:

(A) 84

(B) 168

(C) 234

(D) 512

(E) 600

Comentários

Das condições de existência dos logaritmos, devemos ter $x, y, z > 0$ e $x \neq 1$.

Nessa questão, o bizu é observar a segunda equação:

$$y = e^{2\ln(x)} = e^{\ln(x^2)} = x^2 \Rightarrow y = x^2$$

Com essa relação, substituímos na primeira equação para achar o valor de x:

$$x = \frac{\sqrt[3]{2y^2}}{2} = \frac{\sqrt[3]{2x^4}}{2} \Rightarrow 2x = \sqrt[3]{2x^4} \Rightarrow 8x^3 = 2x^4 \Rightarrow \boxed{x = 4} \Rightarrow \boxed{y = 16}$$

Agora, basta substituir x e y na terceira equação para achar z:

$$\log_2 y + \log_x z = (x + 3)$$

$$\log_2 16 + \log_4 z = 7 \Rightarrow 4 + \log_4 z = 7 \Rightarrow \log_4 z = 3 \Rightarrow z = 4^3 \Rightarrow \boxed{z = 64}$$

$$\therefore S = x + y + z = 4 + 16 + 64 = 84$$

Gabarito: "a".

5.

Seja $A = \{z \in C \mid 2 \leq |z - 3 - 4i| \leq 3\}$ onde C é o conjunto dos números complexos. O valor do produto entre o simétrico do complexo de menor módulo do conjunto A e o conjugado do complexo de maior módulo do mesmo conjunto A é:

(A) -16

(B) -8

(C) $-16/5$

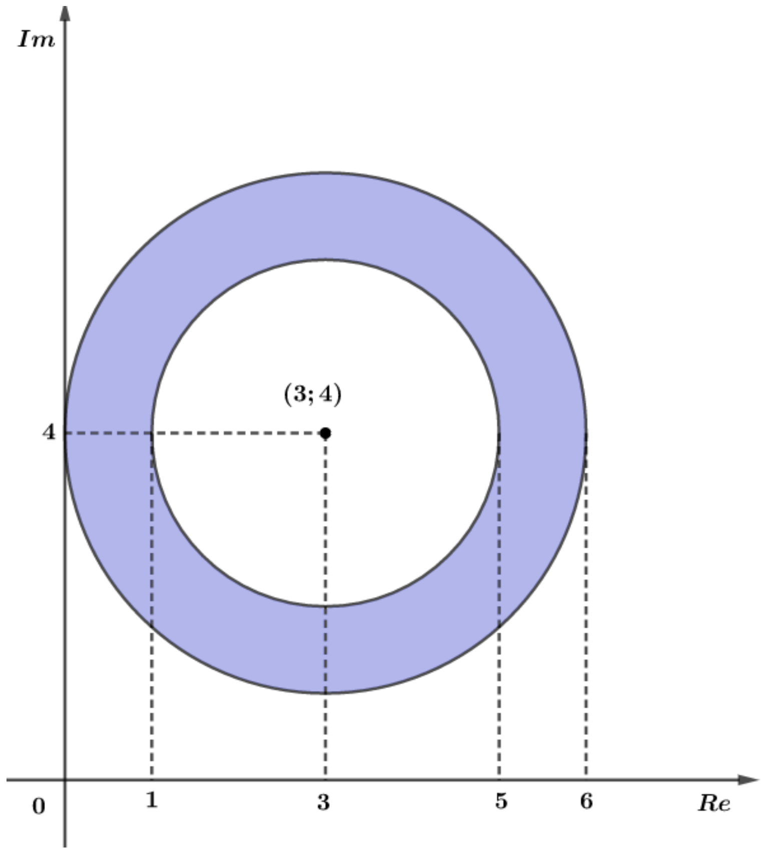
(D) 1

(E) 16

Comentários

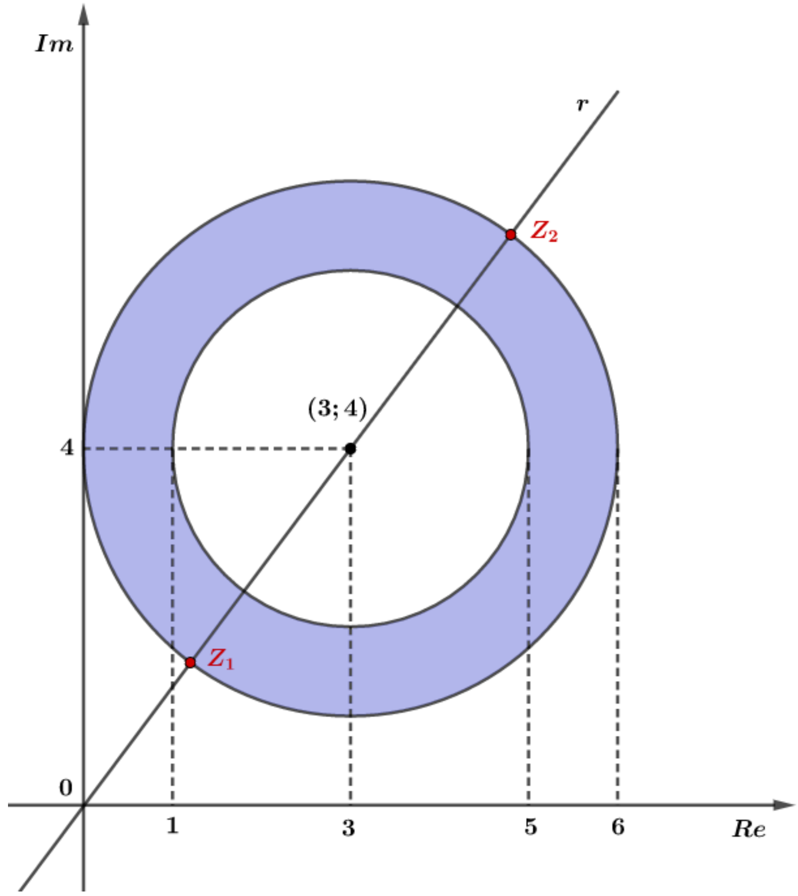
Note que $2 \leq |z - 3 - 4i| \leq 3$ representa duas circunferências concêntricas no plano de Argand-Gauss de centro $3 + 4i$:

$$2 \leq |z - (3 + 4i)| \leq 3$$



Os elementos de A estão representados pela região colorida.

Devemos encontrar o complexo de menor módulo e o complexo de maior módulo no conjunto A. Para isso, traçamos uma reta que passa pela origem e pelo centro das circunferências.



Z_1 é o complexo de menor módulo e Z_2 é o complexo de maior módulo. Vamos calcular a equação da reta r, como ela passa pela origem do sistema e pelo ponto $(3;4)$, temos:

$$r: y = \frac{4}{3}x$$

Os complexos são a intersecção da reta com a circunferência maior. A equação da circunferência maior é

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 9$$

Fazendo a intersecção da reta com essa circunferência, obtemos:

$$(x-3)^2 + \left(\frac{4}{3}x - 4\right)^2 = 9$$

$$(x-3)^2 + \left(\frac{4}{3}(x-3)\right)^2 = 9$$

$$(x-3)^2 + \frac{16}{9}(x-3)^2 = 9$$

$$(x-3)^2 \cdot \frac{25}{9} = 9$$

$$|x-3| = \frac{9}{5} \Rightarrow x = 3 \pm \frac{9}{5}$$

$$x_1 = \frac{6}{5} \text{ ou } x_2 = \frac{24}{5}$$

Para x_1, temos:

$$y_1 = \frac{8}{5}$$

Para x_2, temos:

$$y_2 = \frac{32}{5}$$

Assim, os complexos são:

$$Z_1 = \frac{6}{5} + \frac{8}{5}i$$

$$Z_2 = \frac{24}{5} + \frac{32}{5}i$$

Queremos o produto do simétrico do complexo de menor módulo com o conjugado do complexo de maior módulo:

$$P = (-Z_1) \cdot \overline{Z_2} = -\left(\frac{6}{5} + \frac{8}{5}i\right)\left(\frac{24}{5} - \frac{32}{5}i\right)$$

$$P = -\frac{2}{5}(3+4i)\frac{8}{5}(3-4i) = -\frac{16}{25}(9+16) = -16$$

Gabarito: “a”.

6.

Um polinômio $P(x)$ de grau maior que 3 quando dividido por $x-2$, $x-3$ e $x-5$ deixa restos 2, 3 e 5, respectivamente. O resto da divisão de $P(x)$ por $(x-2)(x-3)(x-5)$ é:

(A) 1

(B) x

(C) 30

(D) $x-1$

(E) $x-30$

Comentários

A divisão de um polinômio $P(x)$ por um divisor $D(x)$ é:

$$P(x)=D(x)\cdot Q(x)+R(x)$$

Do enunciado:

$$P(x)=(x-2)\cdot Q_1(x)+2\Rightarrow P(2)=2$$

$$P(x)=(x-3)\cdot Q_2(x)+3\Rightarrow P(3)=3$$

$$P(x)=(x-5)\cdot Q_3(x)+5\Rightarrow P(5)=5$$

Queremos saber o resto da divisão de $P(x)$ por $(x-2)(x-3)(x-5)$, logo:

$$P(x)=\underbrace{(x-2)(x-3)(x-5)}_{grau\ 3}Q(x)+R(x)$$

Como nosso divisor tem grau 3, o grau do resto deve ser menor ou igual a 2. Vamos supor que o grau do resto seja 2:

$$R(x)=ax^2+bx+c$$

$$P(x)=\underbrace{(x-2)(x-3)(x-5)}_{raízes\ 2,3\ e\ 5}Q(x)+ax^2+bx+c$$

Fazendo $x=2;3;5$, obtemos:

$$P(2)=4a+2b+c=2$$

$$P(3)=9a+3b+c=3$$

$$P(5)=25a+5b+c=5$$

Agora, basta resolver o sistema linear:

$$\begin{cases}4a+2b+c=2\ \ (I)\\9a+3b+c=3\ \ (II)\\25a+5b+c=5\ \ (III)\end{cases}$$

Fazendo $(II)-(I)$ e $(III)-(II)$, encontramos:

$$\begin{cases} 5a+b=1 \\ 16a+2b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10a+2b=2 \\ 16a+2b=2 \end{cases}$$

Subtraindo a segunda equação desse sistema com a primeira:

$$6a=0 \Rightarrow a=0$$

$$a=0 \Rightarrow 5a+b=1 \Rightarrow b=1$$

$$a=0, b=1 \Rightarrow 4a+2b+c=2 \Rightarrow c=0$$

Portanto, o resto é dado por:

$$\boxed{R(x)=x}$$

Gabarito: "b".

7.

Um inteiro positivo é escrito em cada uma das seis faces de um cubo. Para cada vértice, é calculado o produto dos números escritos nas três faces adjacentes. Se a soma desses produtos é 1105, a soma dos seis números das faces é:

(A) 22

(B) 35

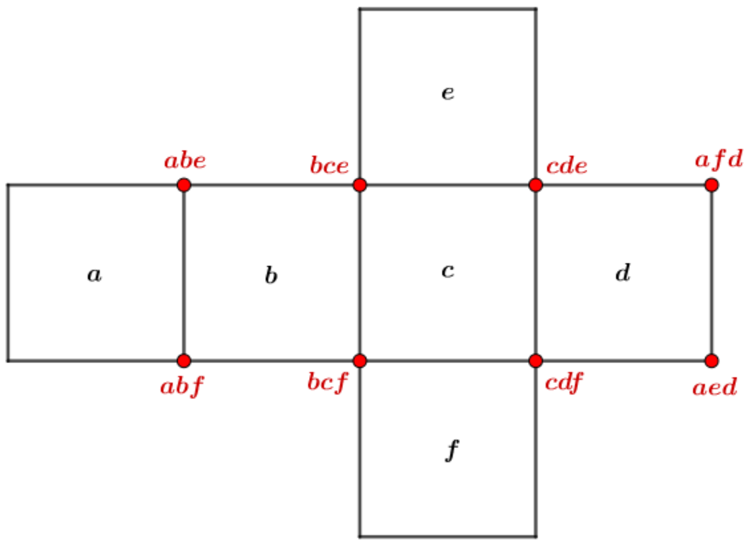
(C) 40

(D) 42

(E) 50

Comentários

Vamos usar um cubo planificado para o problema dado. Para as condições do problema, temos:



O enunciado diz que:

$$abe + abf + bce + bcf + cde + cdf + afd + aed = 1105$$

Fatorando:

$$ab(e+f) + bc(e+f) + cd(e+f) + ad(e+f) = 1105$$

$$(e+f)(ab + bc + cd + ad) = 1105$$

$$(e+f)\big(b(a+c) + d(a+c)\big) = 1105$$

$$(e+f)(a+c)(b+d) = 1105$$

Temos um produto de três números inteiros positivos que resulta no número 1105. Note que:

$$1105 = 5 \cdot 13 \cdot 17$$

1105 é o produto de três números primos. Como $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}_+$, temos que as somas $e+f, a+c, b+d$ não podem resultar em 1, logo, cada número deve assumir um dos números primos. Podemos ter:

$$e + f = 5$$

$$b + d = 13$$

$$a + c = 17$$

A questão pede:

$$a + b + c + d + e + f = 5 + 13 + 17 = 35$$

Gabarito: "b".

8.

Uma progressão geométrica é formada com os números naturais A, B e C, nessa ordem. O $log(A)$ possui a mesma mantissa, M, do $log(B)$ e C é a característica do $log(A)$. Sabe-se que $M = log(C)$ e que possui o maior valor possível. O valor da mantissa do $log(ABC)$ é:

(A) M

(B) $2M$

(C) $3M$

(D) $3M - 2$

(E) $3M - 3$

Comentários

Como (A, B, C) formam uma PG nessa ordem, podemos escrever:

$$B^2 = AC$$

O enunciado dá informações a respeito da característica e da mantissa dos logaritmos. A primeira coisa que devemos lembrar é que a característica de um logaritmo é a parte inteira do seu valor e a mantissa é a parte fracionária.

O enunciado diz que:

$$\log(A) = C + M$$

$$\log(B) = X + M$$

$$\log(C) = M$$

Não sabemos qual é a característica de $\log(B)$, podemos extrair essa informação da PG:

$$B^2 = AC$$

Aplicando o log na equação acima:

$$\log(B^2) = \log(AC) \Rightarrow 2\log(B) = \log(A) + \log(C)$$

Substituindo os valores dos logaritmos:

$$2(X + M) = C + M + M \Rightarrow 2X = C \Rightarrow X = \frac{C}{2}$$

Como a característica de C é zero, temos que C é um número entre 1 e 10. Além disso, X deve ser um número natural, logo C deve ser um número par, as possibilidades são:

$$C \in \{2; 4; 6; 8\}$$

O enunciado diz que $M = \log(C)$ possui o maior valor possível, logo, $C = 8$.

Com isso, temos:

$$\log(C) = \log(8) = \log(2^3) = 3 \cdot \log(2)$$

O valor do $\log(2)$ é aproximadamente 0,3, logo:

$$M \cong 3 \cdot 0{,}3 = 0{,}9$$

Queremos saber o valor da mantissa do $\log(ABC)$:

$$\log(ABC) = \log(A) + \log(B) + \log(C)$$

Usando $2\log(B) = \log(A) + \log(C)$:

$$\log(ABC) = 3\log(B) = 3(X + M) = \frac{3C}{2} + 3M = \frac{3 \cdot 8}{2} + 3(0{,}9) = 12 + 2{,}7$$

Devemos notar que a mantissa do $\log(ABC)$ está no número 2,7 e ele é resultado de $3M$, ou seja,

$$3M = 2{,}7 = 2 + 0{,}7 \Rightarrow 3M - 2 = 0{,}7$$

Portanto, a mantissa do $\log(ABC)$ é $0{,}7 = 3M - 2$.

Gabarito: “d”.

9.

Diversos modelos de placas de identificação de veículos já foram adotados no Brasil. Considere os seguintes modelos de placas e a descrição de sua composição alfanumérica:

Modelo 1: AB123 (duas letras seguidas de três números)

Modelo 2: AB1234 (duas letras seguidas de quatro números)

Modelo 3: ABC1234 (três letras seguidas de quatro números)

Modelo 4: ABC1D23 (três letras seguidas de um número, uma letra e dois números)

Sejam c_1, c_2, c_3 e c_4 as quantidades das combinações alfanuméricas possíveis para os modelos 1, 2, 3 e 4, respectivamente. Os números c_1, c_2, c_3 e c_4 são termos de uma progressão aritmética com infinitos termos com a maior razão possível. A soma dos algarismos da razão dessa progressão é:

(A) 11

(B) 12

(C) 14

(D) 16

(E) 19

<u>Observação:</u>

• considere o alfabeto com 26 letras.

Comentários

Inicialmente, devemos encontrar os valores de c_1, c_2, c_3 e c_4. Eles são as combinações alfanuméricas dos modelos de placas dados, logo:

Modelo 1: AB123 ⇒ $c_1 = 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 26^2 \cdot 10^3$

Modelo 2: AB1234 ⇒ $c_2 = 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 26^2 \cdot 10^4$

Modelo 3: ABC1234 ⇒ $c_3 = 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 26^3 \cdot 10^4$

Modelo 4: ABC1D23 ⇒ $c_4 = 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 = 26^4 \cdot 10^3$

Note que $c_4 > c_3 > c_2 > c_1$. O enunciado diz que esses números são termos de uma PA:

$$\left(\dots, c_1, \underbrace{\dots}_{nr}, c_2, \underbrace{\dots}_{mr}, c_3, \underbrace{\dots}_{pr}, c_4, \dots \right)$$

Sabemos que numa PA, a distância entre um termo e outro é um número inteiro vezes a razão da PA. Vamos calcular a distância entre os termos:

$$c_2 - c_1 = 26^2 \cdot 10^4 - 26^2 \cdot 10^3 = 26^2 \cdot 10^3 \cdot 9 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 13^2$$

$$c_3 - c_2 = 26^3 \cdot 10^4 - 26^2 \cdot 10^4 = 26^2 \cdot 10^4 \cdot 25 = 2^6 \cdot 5^6 \cdot 13^2$$

$$c_4 - c_3 = 26^4 \cdot 10^3 - 26^3 \cdot 10^4 = 26^3 \cdot 10^3 \cdot 16 = 2^{10} \cdot 5^3 \cdot 13^3$$

Para que a PA tenha a maior razão possível, ela deve ser o máximo divisor comum (MDC) das diferenças calculadas, logo:

$$r = MDC\{2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 13^2; 2^6 \cdot 5^6 \cdot 13^2; 2^{10} \cdot 5^3 \cdot 13^3\} = 2^5 \cdot 5^3 \cdot 13^2 = 676000$$

Portanto, a soma dos algarismos dessa razão é:

$$6 + 7 + 6 = 19$$

Gabarito: "e".

10.

Considere a progressão geométrica $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ e a progressão aritmética $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ com as condições:

$$a_1 > 0$$
$$\frac{a_2}{a_1} > 1; \text{e}$$
$$b_2 - b_1 > 0$$

Para que $[\log_\alpha(a_n) - b_n]$ não dependa de n, o valor de α deverá ser:

(A) $\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{1}{b_2}}$

(B) $\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{1}{b_1}}$

(C) $\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{1}{b_2 - b_1}}$

(D) $\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{1}{b_1 - b_2}}$

(E) $\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{1}{b_1 b_2}}$

Comentários

Como $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ é uma PG e $(b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$ é uma PA, temos:

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$b_n = b_1 + (n-1)r$$

Sendo q a razão da PG e r a razão da PA.

Das condições do enunciado:

$$a_1 > 0 \; e \; \frac{a_2}{a_1} > 1 \Rightarrow a_1 > 0 \; e \; q > 1$$

$$b_2 - b_1 > 0 \Rightarrow r > 0$$

Assim, a PG possui apenas termos positivos e é crescente e a PA também é crescente.

Vamos analisar a expressão dada:

$$[\log_\alpha(a_n) - b_n] = [\log_\alpha(a_1 q^{n-1}) - (b_1 + (n-1)r)]$$

$$= \log_\alpha a_1 + (n-1)\log_\alpha q - b_1 - nr + r$$

$$= \log_\alpha a_1 - \log_\alpha q - b_1 + r + n\log_\alpha q - nr$$

Para que a expressão não dependa de n, devemos ter:

$$n\log_\alpha q - nr = 0$$

$$n(\log_\alpha q - r) = 0 \Rightarrow \log_\alpha q - r = 0 \Rightarrow \log_\alpha q = r \Rightarrow q = \alpha^r \Rightarrow \alpha = q^{\frac{1}{r}}$$

Escrevendo q em função de a_1 e a_2, e r em função de b_1 e b_2:

$$q = \frac{a_2}{a_1} \ e \ r = b_2 - b_1$$

$$\therefore \boxed{\alpha = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{1}{b_2 - b_1}}}$$

Gabarito: “c”.

11.

Todos os arcos entre 0 e 2π radianos que satisfazem a desigualdade

$$senx - \frac{1}{2} > \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(A) $\frac{\pi}{12}$ e $\frac{\pi}{6}$

(B) $\frac{5\pi}{12}$ e $\frac{7\pi}{12}$

(C) $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{6}$

(D) $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{2}$

(E) $\frac{5\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{12}$

Comentários

Reescrevendo a inequação, temos:

$$senx - \cos x > \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

O membro à esquerda pode ser reescrito do seguinte modo:

$$senx - \cos x = \sqrt{2}\left(senx\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos x\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(senx \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos x\, sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\therefore senx - \cos x = \sqrt{2} \cdot sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Assim, temos:

$$\sqrt{2} \cdot sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > \frac{\sqrt{3}+1}{2} \Rightarrow sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

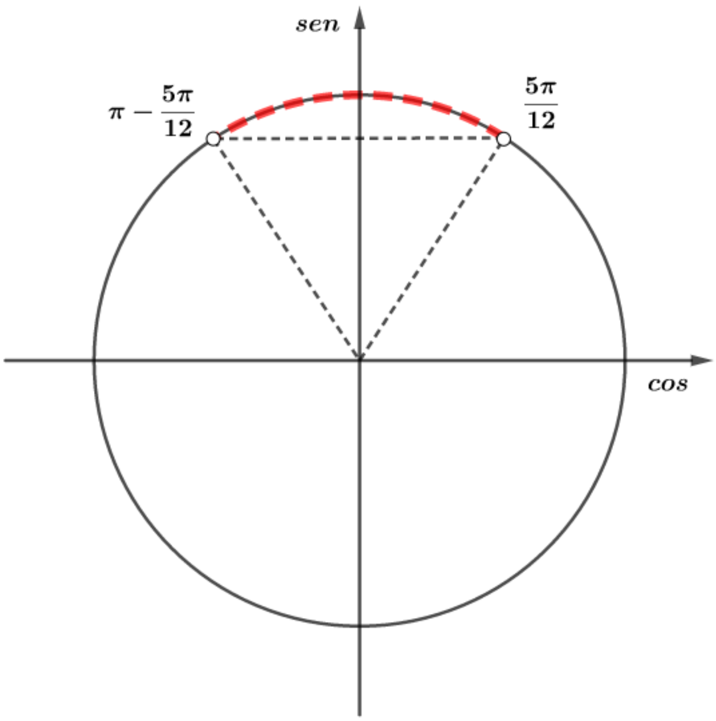
$$\Rightarrow sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

O número à direita é um valor conhecido de seno, ele é o seno de 75°:

$$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = sen(75°) = sen\left(\frac{5\pi}{12}\right)$$

$$\Rightarrow sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > sen\left(\frac{5\pi}{12}\right)$$

Para resolver essa inequação, podemos fazer uso do ciclo trigonométrico:



Observando o ciclo, podemos ver que os ângulos que satisfazem à inequação devem satisfazer a seguinte condição:

$$\frac{5\pi}{12} < x - \frac{\pi}{4} < \pi - \frac{5\pi}{12}$$

$$\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{4}<x<\frac{7\pi}{12}+\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{8\pi}{12}<x<\frac{10\pi}{12}$$

$$\therefore \boxed{\frac{2\pi}{3}<x<\frac{5\pi}{6}}$$

Gabarito: "c".

12.

O lugar geométrico definido pela equação $x^2+3y^2+5=2x-xy-4y$ representa

(A) uma elipse.

(B) uma hipérbole.

(C) uma circunferência.

(D) um conjunto vazio.

(E) duas retas paralelas.

Comentários

Nessa questão, poderíamos ficar tentados a calcular o discriminante da cônica e, assim, acharíamos que o lugar geométrico é uma elipse. No entanto, devemos nos atentar às alternativas e ver que nas letras (D) e (E), temos um conjunto vazio e duas retas paralelas, respectivamente. Assim, vamos verificar se a equação dada pode ser uma dessas possibilidades. Analisemos a equação quadrática em função de x:

$$x^2+3y^2+5=2x-xy-4y$$

$$x^2+(y-2)x+3y^2+4y+5=0$$

Devemos verificar se essa equação possui solução. Para isso, vamos calcular seu discriminante:

$$\Delta=(y-2)^2-4(3y^2+4y+5)$$

$$\Delta=y^2-4y+4-12y^2-16y-20$$

$$\Delta=-11y^2-20y-16$$

Encontramos uma função em y. Ao analisarmos o discriminante da equação $-11y^2-20y-16=0$, verificamos que ele é menor que zero:

$$\Delta'=(-20)^2-4(-11)(-16)=400-704=-304<0$$

Como o discriminante dessa equação é menor que zero e a função $\Delta=f(y)=-11y^2-20y-16$ representa uma parábola com concavidade para baixo, temos que $\forall y\in\mathbb{R}, f(y)<0$, ou seja, $\Delta<0, \forall y\in\mathbb{R}$. Portanto, a equação inicial em x não possui solução, logo, o lugar geométrico é o conjunto vazio.

Gabarito: "d".

13.

Um triângulo equilátero é projetado ortogonalmente em um plano, gerando um triângulo isósceles, cujo ângulo desigual mede $30°$. O cosseno do ângulo do plano do triângulo equilátero com o plano de projeção é:

(A) $2\sqrt{3}-3$

(B) $4-2\sqrt{3}$

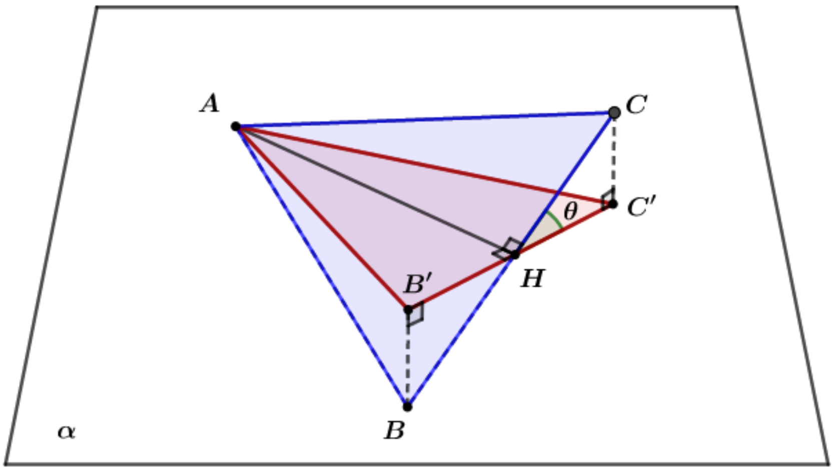
(C) $2-\sqrt{3}$

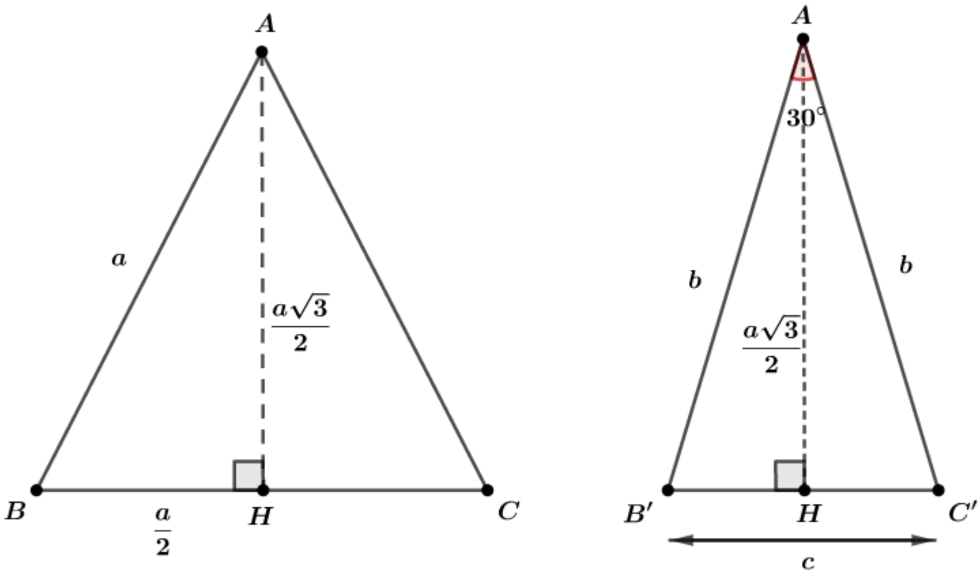
(D) $1-\sqrt{3}$

(E) $\frac{\sqrt{3}}{2}-1$

Comentários

Muita atenção nessa questão! Ao ler o enunciado, pensaríamos que para gerar um triângulo isósceles através da projeção ortogonal de um triângulo equilátero, deveríamos ter um lado do triângulo equilátero paralelo ao plano de projeção. Mas a questão diz que o ângulo desigual do triângulo isósceles mede $30°$, ou seja, esse ângulo é menor que o ângulo do vértice correspondente do triângulo que o gerou. Desse modo, para a projeção ortogonal desse triângulo equilátero ser um triângulo isósceles que satisfaz as condições do enunciado, a altura do triângulo equilátero deve ser paralela ao plano de projeção. Assim, do enunciado, podemos desenhar as seguintes figuras:





ABC é o triângulo equilátero e $AB'C'$ é sua projeção ortogonal ao plano α. Note que as alturas desses triângulos são congruentes. Aplicando a lei dos cossenos no $\Delta AB'C'$, temos:

$$c^2 = b^2 + b^2 - 2b^2 \cos 30° = 2b^2 - b^2\sqrt{3} = b^2\left(2 - \sqrt{3}\right)$$

$$\Rightarrow b^2 = \frac{c^2}{2 - \sqrt{3}} = c^2\left(2 + \sqrt{3}\right)$$

$$\therefore \boxed{b = c\sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo $AB'H$:

$$b^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 \Rightarrow \left(c\sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)^2 - \frac{c^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$\frac{c^2\left(7 + 4\sqrt{3}\right)}{4} = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow c^2\left(2 + \sqrt{3}\right)^2 = 3a^2 \Rightarrow \frac{c^2}{a^2} = \frac{3}{\left(2 + \sqrt{3}\right)^2}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{3}\left(2 - \sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3} - 3$$

A questão pede o cosseno do ângulo do plano do triângulo equilátero com o plano de projeção. Perceba que esse valor é a razão $\frac{B'C'}{BC}$, logo:

$$\boxed{\cos\theta = \frac{c}{a} = 2\sqrt{3} - 3}$$

Gabarito: "a".

14.

Em um cubo regular de aresta a, os pontos M, N e L pertencentes às três arestas distintas que partem do vértice A estão a uma distância x de A tal que $0 < x \leq \frac{a}{2}$. Para que plano MNL seja tangente à esfera inscrita no cubo, o valor de x é:

(A) $\frac{a}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$

(B) $\frac{a}{2}\left(3-\sqrt{3}\right)$

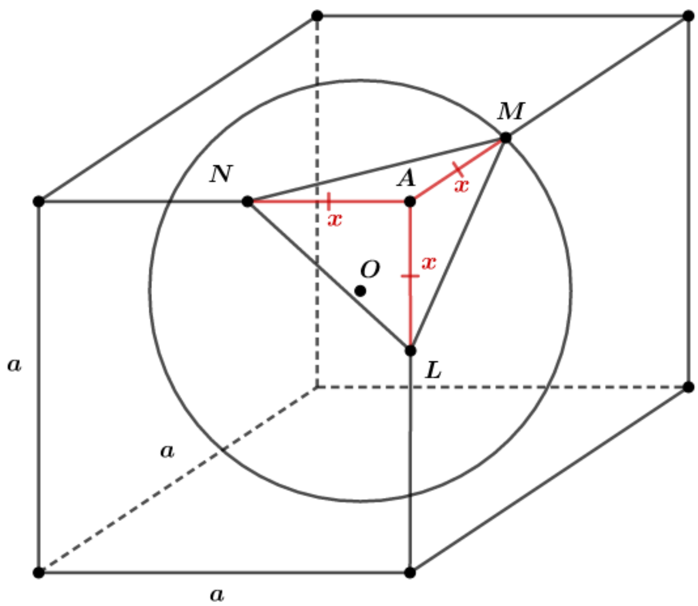
(C) $\frac{a}{2}\left(2-\sqrt{3}\right)$

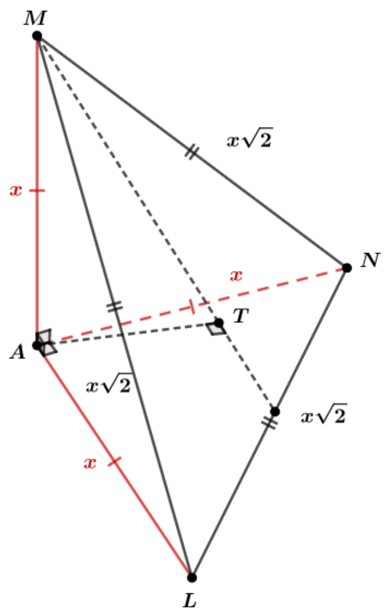
(D) $\frac{a}{2}\left(4-2\sqrt{3}\right)$

(E) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Comentários

Desenhando a figura do enunciado, temos:





$AMNL$ é uma pirâmide triangular. Como $AM = AN = AL = x$ e A é o vértice de um cubo, temos pelo teorema de Pitágoras que:

$$MN = NL = ML = x\sqrt{2}$$

Logo, MNL é um triângulo equilátero.

AT é a altura da pirâmide $AMNL$. Para que MNL seja tangente à esfera inscrita, a soma do raio da esfera com a altura AT deve ser igual à metade da diagonal do cubo, ou seja,

$$R + AT = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

O raio da esfera inscrita ao cubo é igual à metade da aresta do cubo:

$$R = \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{AT = \frac{a}{2}\left(\sqrt{3} - 1\right)}$$

Para encontrar x em função de a, vamos calcular o volume da pirâmide de duas formas:

$$V_{AMNL} = \frac{1}{6}x^3 \ (pois\ é\ trirretângulo\ no\ vértice\ A)$$

$$V_{AMNL} = \frac{1}{3}AT \cdot S_{MNL} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2}\left(\sqrt{3} - 1\right) \cdot \frac{1}{2}\left(x\sqrt{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{ax^2\left(3 - \sqrt{3}\right)}{12}$$

Igualando as expressões de volume:

$$\frac{1}{6}x^3 = \frac{ax^2\left(3 - \sqrt{3}\right)}{12} \therefore \boxed{x = \frac{a}{2}\left(3 - \sqrt{3}\right)}$$

Um detalhe é que a questão restringiu os valores de x:

$$0 \leq x \leq \frac{a}{2}$$

Mas

$$\frac{a}{2}\left(3 - \sqrt{3}\right) \cong \frac{a}{2}(3 - 1{,}7) = \frac{a}{2}(1{,}3) > \frac{a}{2}$$

Assim, o gabarito da questão não condiz com as restrições do problema e, por isso, acreditamos que o IME vá anular essa questão.

Gabarito: "b".

15.

Considere a função $f(x) = \sqrt{x - a}, x \geq a$, onde a é um número real positivo. Seja s a reta secante ao gráfico de f em $\left(2a, f(2a)\right)$ e $\left(5a, f(5a)\right)$ e t a reta tangente ao gráfico de f que é paralela à reta s. A área do quadrilátero formado pela reta s, a reta t, a reta $x = 2a$ e a reta $x = 5a$ é $\sqrt{2}$ unidades de área. O valor de a, em unidades de comprimento, é:

(A) $2\sqrt{2}$

(B) 4

(C) 2

(D) $3\sqrt{2}$

(E) $2\sqrt[3]{4}$

Comentários

Antes de resolvermos a questão, devemos perceber que o quadrilátero é um paralelogramo, pois as retas que possuem seus pontos (r e t) são paralelas entre si e as outras retas que formam o paralelogramo também são paralelas entre si.

Vamos calcular o coeficiente angular da reta s. Sabemos que ela passa pelos pontos $\left(2a, f(2a)\right)$ e $\left(5a, f(5a)\right)$:

$$f(2a) = \sqrt{a} \text{ e } f(5a) = 2\sqrt{a}$$

Pontos de s:

$$\left(2a, \sqrt{a}\right) \text{ e } \left(5a, 2\sqrt{a}\right)$$

O coeficiente angular de s é:

$$m_s = \frac{\left(2\sqrt{a} - \sqrt{a}\right)}{5a - 2a} \Rightarrow \boxed{m_s = \frac{\sqrt{a}}{3a}}$$

Sendo t paralela à r, temos que seu coeficiente angular é:

$$m_t = m_s = \frac{\sqrt{a}}{3a}$$

Logo, t pode ser escrito como:

$$t: y = \frac{\sqrt{a}}{3a}x + c$$

Onde c é seu coeficiente linear.

Como t tangencia f, ao substituir t em f, devemos encontrar apenas uma solução:

$$f(x) = y = \sqrt{x - a}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{3a}x + c = \sqrt{x - a}$$

Elevando ao quadrado ambos os membros da equação:

$$\frac{a}{9a^2}x^2 + \frac{2\sqrt{a}c}{3a}x + c^2 = x - a$$

$$\frac{x^2}{9a} + \left(\frac{2\sqrt{a}c}{3a} - 1\right)x + c^2 + a = 0$$

Encontrando o discriminante e igualando a zero:

$$\Delta = \left(\frac{2\sqrt{a}c}{3a} - 1\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{9a} \cdot (c^2 + a) = 0$$

$$\frac{4ac^2}{9a^2} - \frac{4\sqrt{a}c}{3a} + 1 - \frac{4c^2}{9a} - \frac{4}{9} = 0$$

$$-\frac{4\sqrt{a}c}{3a} + \frac{5}{9} = 0$$

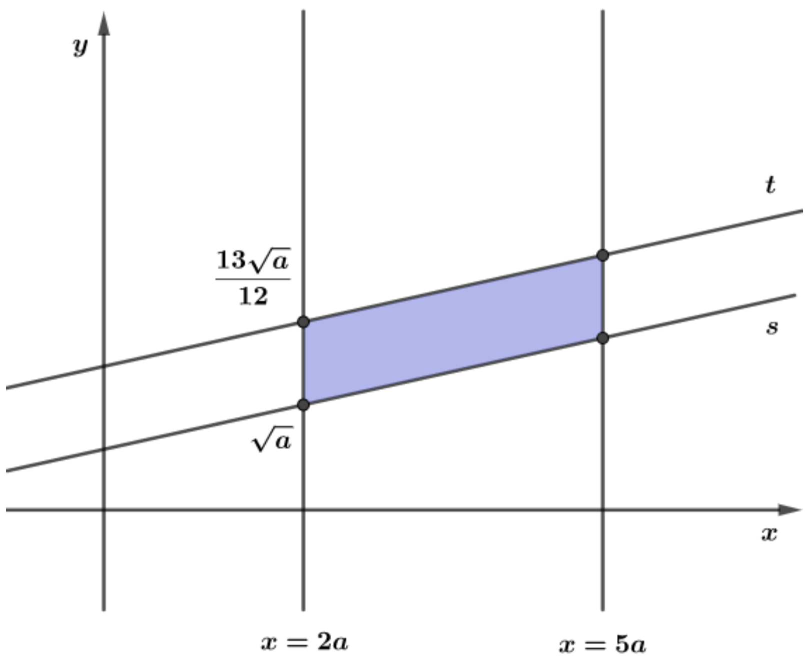
$$\frac{c}{\sqrt{a}} = \frac{5}{9} \cdot \frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{c = \frac{5\sqrt{a}}{12}}$$

$$\Rightarrow t: y = \frac{\sqrt{a}}{3a}x + \frac{5\sqrt{a}}{12}$$

Para $x = 2a$:

$$t: y = \frac{\sqrt{a}}{3a}2a + \frac{5\sqrt{a}}{12} = \frac{13\sqrt{a}}{12}$$

Fazendo o esboço do gráfico:



A área do paralelogramo é dado por:

$$A = (5a - 2a)\left(\frac{13\sqrt{a}}{12} - \sqrt{a}\right) = 3a\left(\frac{\sqrt{a}}{12}\right) = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{4}$$

Como $A = \sqrt{2}$, temos:

$$A = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{4} = \sqrt{2} \Rightarrow a^{\frac{3}{2}} = 4\sqrt{2} \Rightarrow a^3 = 2^5 \therefore \boxed{a = 2\sqrt[3]{4}}$$

Gabarito: “e”.