Correção da prova

Fuvest 2020

Professor Marçal

Sumário

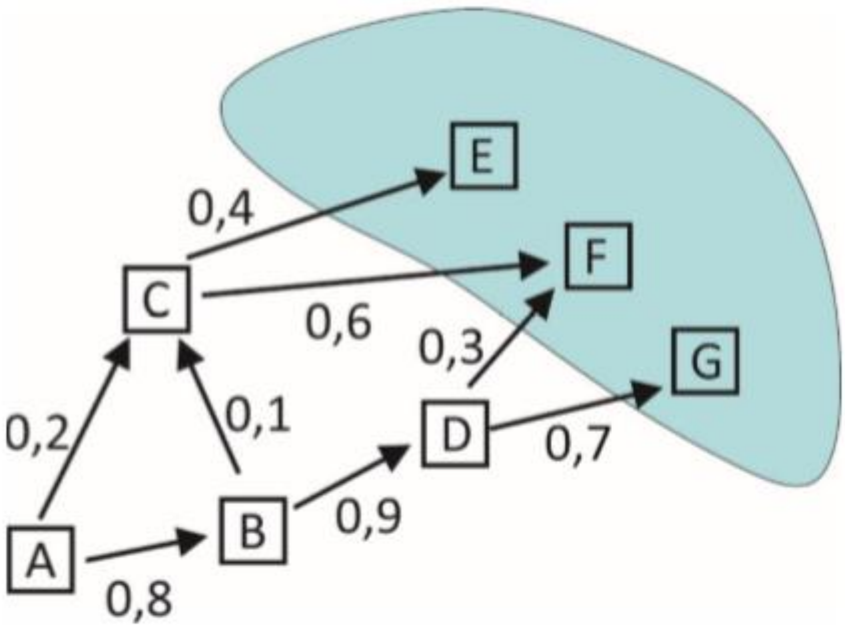
Questões 3

Gabarito 15

QUESTÕES

13.

Carros que saem da cidade A rumo a alguma das cidades turísticas E, F e G fazem caminhos diversos, passando por pelo menos uma das cidades B, C e D, apenas no sentido indicado pelas setas, como mostra a figura. Os números indicados nas setas são as probabilidades, dentre esses carros, de se ir de uma cidade a outra.



Nesse cenário, a probabilidade de um carro ir de A a F é

(A) 0,120.

(B) 0,216.

(C) 0,264.

(D) 0,336.

(E) 0,384.

Comentários

Para ir de A a F, há três caminhos possíveis: ACF, $ABCF$ e $ABDF$.

Em cada caminho, as probabilidades são dadas pelos produtos:

$ACF \rightarrow 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}12$

$ABCF \rightarrow 0{,}8 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}6 = 0{,}048$

$ABDF \rightarrow 0{,}8 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}3 = 0{,}216$

Como os caminhos são todos alternativos, a probabilidade total de o carro ir de A a F é dada pela soma

$$ACF + ABCF + ABDF$$

$$0{,}12 + 0{,}048 + 0{,}216$$

$$0{,}384$$

Gabarito: e)

14.

Se, em 15 anos, o salário mínimo teve um aumento nominal de 300% e a inflação foi de 100%, é correto afirmar que o aumento real do salário mínimo, nesse período, foi de

(A) 50%.

(B) 100%.

(C) 150%.

(D) 200%.

(E) 250%.

Comentários

Considerando o salário x com um crescimento de 300%, ou seja, de $3x$, temos:

$$salário = x \rightarrow x + 3x = 4x$$

Já seu poder de compra, sofrendo uma alta de 100%, ou seja, de $1x$, temos:

$$compra = x \rightarrow x + 1x = 2x$$

Desse modo, podemos perceber que o salário que tinha uma relação de 1 para 1 com a compra, agora é o dobro da compra. Se o poder de compra é o dobro, sofreu aumento de 100%, indicando o gabarito b).

Podemos, alternativamente, utilizar a fórmula para o ganho real:

$$1 + A = (1 + i) \cdot (1 + R)$$

$$1 + 3 = (1 + 1) \cdot (1 + R)$$

$$4 = 2 \cdot (1 + R)$$

$$2 = 1 + R$$

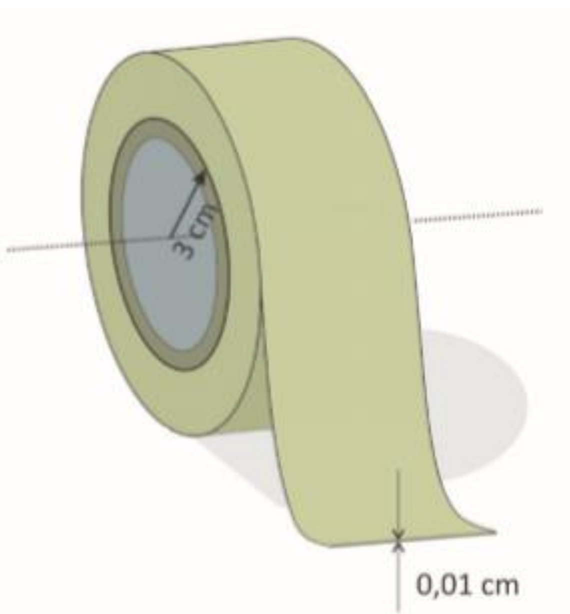
$$1 = R$$

$$100\% = R$$

Gabarito: b)

15.

O cilindro de papelão central de uma fita crepe tem raio externo de 3 cm. A fita tem espessura de 0,01 cm e dá 100 voltas completas. Considerando que, a cada volta, o raio externo do rolo é aumentado no valor da espessura da fita, o comprimento total da fita é de, aproximadamente,



(A) 9,4 m.

(B) 11,0 m.

(C) 18,8 m.

(D) 22,0 m.

(E) 25,1 m.

Note e adote: $\pi \cong 3{,}14$.

Comentários

Sabendo que o comprimento de uma circunferência é dado por $C = 2 \cdot \pi \cdot R$, temos a seguinte sequência de comprimentos ao enrolar a fita no cilintro:

$$C_1 = 2 \cdot \pi \cdot R_1$$
$$C_2 = 2 \cdot \pi \cdot R_2$$
$$C_3 = 2 \cdot \pi \cdot R_3$$
$$\vdots$$
$$C_{100} = 2 \cdot \pi \cdot R_{100}$$

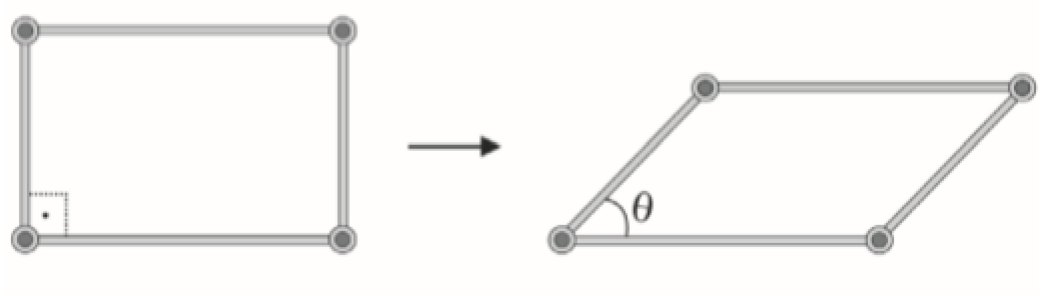
Dessa forma, o comprimento total da fita é dado por:

$$C_T = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots + C_{100}$$
$$C_T = 2 \cdot \pi \cdot R_1 + 2 \cdot \pi \cdot R_2 + 2 \cdot \pi \cdot R_3 + \cdots + 2 \cdot \pi \cdot R_{100}$$
$$C_T = 2 \cdot \pi \cdot (R_1 + R_2 + R_3 + \cdots + R_{100})$$
$$C_T = 2 \cdot 3{,}14 \cdot (3{,}01 + 3{,}02 + 3{,}03 + \cdots + 4)$$
$$C_T = 2 \cdot 3{,}14 \cdot \frac{(3{,}01 + 4) \cdot 100}{2}$$
$$C_T = 3{,}14 \cdot 7{,}01 \cdot 100$$
$$C_T = 22{,}0114 \cdot 100\ cm$$
$$C_T = 22{,}0114\ \ m$$

Gabarito: d)

16.

Um objeto é formado por 4 hastes rígidas conectadas em seus extremos por articulações, cujos centros são os vértices de um paralelogramo. As hastes movimentam-se de tal forma que o paralelogramo permanece sempre no mesmo plano. A cada configuração desse objeto, associa-se d, a medida do menor ângulo interno do paralelogramo. A área da região delimitada pelo paralelogramo quando d = 90° é A.



Para que a área da região delimitada pelo paralelogramo seja $\frac{A}{2}$ o valor de θ é, necessariamente, igual a

(A) 15°.

(B) 22,5°.

(C) 30°.

(D) 45°.

(E) 60°.

Comentários

Chamando os lados do retângulo de x e y, temos a seguinte relação entre suas áreas:

$$x \cdot y \cdot sen(\theta) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y$$

$$sen(\theta) = \frac{1}{2}$$

$$\theta = 30°$$

Gabarito: c)

17.

A menor esfera na qual um paralelepípedo reto-retângulo de medidas 7 cm x 4 cm x 4 cm está inscrito tem diâmetro de

(A) 9 cm.

(B) 10 cm.

(C) 11 cm.

(D) 12 cm.

(E) 15 cm.

Comentários

Para que a esfera tangencie todos os vértices do paralelepípedo, seu diâmetro será igual à diagonal do paralelepípedo.

$$d_P^2 = 4^2 + 4^2 + 7^2$$

$$d_P^2 = 16 + 16 + 49$$

$$d_P^2 = 81$$

$$d_P = \sqrt{81}$$

$$d_P = 9$$

Gabarito: a)

18.

A dona de uma lanchonete observou que, vendendo um combo a R$ 10,00, 200 deles são vendidos por dia, e que, para cada redução de R$ 1,00 nesse preço, ela vende 100 combos a mais. Nessas condições, qual é a máxima arrecadação diária que ela espera obter com a venda desse combo?

(A) R$ 2.000,00

(B) R$ 3.200,00

(C) R$ 3.600,00

(D) R$4.000,00

(E) R$ 4.800,00

Comentários

A arrecadação é dada pelo produto entre o preço de venda e o número de vendas.

$Arrecadação = P \cdot V = 10 \cdot 200$

Como, ao retirar 1 real, ganha-se 100 clientes, ao retirar x reais do preço, ganhar-se-á 100x clientes. Dessa forma, podemos reescrever nossa arrecadação como:

$$Arrecadação = (10 - x) \cdot (200 + 100x)$$

$$Arrecadação = 2000 + 1000x - 200x - 100x^2$$

$$Arrecadação = -100x^2 + 800 + x + 2000$$

Podemos perceber que a arrecadação depende da variável x de forma quadrática, cuja parábola apresenta concavidade negativa ($a < 0$). Assim, ao tentar maximizar a arrecadação, estamos, na verdade, procurando o vértice da parábola.

$$\Delta = 800^2 - 4 \cdot (-100) \cdot 2000 = 640\,000 + 800\,000 = 1\,440\,000$$

$$Arrecadação_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1\,440\,000}{4 \cdot (-100)} = \frac{14\,400}{4} = 3\,600$$

Gabarito: c)

19.

A função E de Euler determina, para cada número natural n, a quantidade de números naturais menores do que n cujo máximo divisor comum com n é igual a 1. Por exemplo, E (6) = 2 pois os números menores do que 6 com tal propriedade são 1 e 5. Qual o valor máximo de E (n), para n de 20 a 25?

(A) 19

(B) 20

(C) 22

(D) 24

(E) 25

Comentários

A descrição da função de Euler indica que devemos selecionar, a cada número n, todos os números menores que n, que sejam primos com n.

Para $n = 20$, temos:

$$20 \rightarrow 1,3,7,9,11,13,17,19 \rightarrow E(20) = 8$$

Para $n = 21$, temos:

$$21 \rightarrow 1,2,4,5,8,10,11,13,16,17,19,20 \rightarrow E(21) = 12$$

Perceba que, por serem números compostos, acabamos por retirar todos os números menores que n que tenham algum primo em comum com n.

Dessa forma, não há necessidade de fazermos o processo para todos os números do exercício (entre 20 e 25), pois, nesse intervalo, só há um primo, o 23.

Assim, para o 23, não precisaremos retirar número algum da sequência dos números menores que ele, pois é primo, resultando no maior resultado possível, nesse intervalo, para $E(n)$.

Portanto, $n = 23$

$$23 \rightarrow 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22 \rightarrow 22$$

Gabarito: c)

20.

Se $3x^2 - 9x + 7 = (x - a)^3 - (x - b)^3$, para todo número real x, o valor de $a + b$ é

(A) 3.

(B) 5.

(C) 6.

(D) 9.

(E) 12.

Comentários

Desenvolvendo os cubos, temos:

$$3x^2 - 9x + 7 = (x - a)^3 - (x - b)^3$$

$$3x^2 - 9x + 7 = x^3 - 3x^2a + 3xa^2 - a^3 - (x^3 - 3x^2b + 3xb^2 - b^3)$$

$$3x^2 - 9x + 7 = x^3 - 3x^2a + 3xa^2 - a^3 - x^3 + 3x^2b - 3xb^2 + b^3$$

$$3x^2 - 9x + 7 = (3b - 3a)x^2 + (3a^2 - 3b^2)x - a^3 + b^3$$

O que nos leva ao seguinte sistema de equações

$$3b - 3a = 3$$
$$3a^2 - 3b^2 = -9$$
$$-a^3 + b^3 = 7$$

$$3(b - a) = 3$$
$$3(a^2 - b^2) = -9$$
$$-a^3 + b^3 = 7$$

$$b - a = 1$$
$$a^2 - b^2 = -3$$
$$b^3 - a^3 = 7$$

$$b - a = 1$$
$$(a + b) \cdot (a - b) = -3$$
$$b^3 - a^3 = 7$$

$$b - a = 1$$
$$(a + b) \cdot (-1) = -3$$
$$b^3 - a^3 = 7$$

$$b - a = 1$$
$$a + b = 3$$
$$b^3 - a^3 = 7$$

Como a questão solicitou o valor de $a + b$, não é preciso ir adiante, já temos nossa resposta: $a + b = 3$.

Gabarito: a)

21.

Uma agência de turismo vendeu um total de 78 passagens para os destinos: Lisboa, Paris e Roma. Sabe-se que o número de passagens vendidas para Paris foi o dobro do número de passagens vendidas para os outros dois destinos conjuntamente. Sabe-se também que, para Roma, foram vendidas duas passagens a mais que a metade das vendidas para Lisboa. Qual foi o total de passagens vendidas, conjuntamente, para Paris e Roma?

(A) 26

(B) 38

(C) 42

(D) 62

(E) 68

Comentários

Da leitura do enunciado, tiramos o seguinte sistema de equações:

$$L + P + R = 78$$
$$P = 2 \cdot (L + R)$$
$$R = 2 + \frac{L}{2}$$

Dando andamento à resolução do sistema, temos:

$$\begin{aligned} L + P + R &= 78 \\ 2L - P + 2R &= 0 \\ -L \quad + 2R &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L + P + R &= 78 \\ -3P \quad &= -78 \cdot 2 \\ P + 3R &= 82 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L + P + R &= 78 \\ P \quad &= 52 \\ P + 3R &= 82 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L + P + R &= 78 \\ P \quad &= 52 \\ R &= 10 \end{aligned}$$

Novamente, a questão nos solicitou o valor da soma $P + R$, portanto, não há necessidade de seguirmos com a resolução do sistema, uma vez que

$$P + R = 52 + 10 = 62$$

Gabarito: d)

22.

Um ponto (x, y) do plano cartesiano pertence ao conjunto F se é equidistante dos eixos OX e OY e pertence ao círculo de equação $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 2 = 0$. É correto afirmar que F

(A) é um conjunto vazio.

(B) tem exatamente 2 pontos, um no primeiro quadrante e outro no segundo quadrante.

(C) tem exatamente 2 pontos, ambos no primeiro quadrante.

(D) tem exatamente 3 pontos, sendo dois no primeiro quadrante e outro no segundo quadrante.

(E) tem exatamente 4 pontos, sendo dois no primeiro quadrante e dois no segundo quadrante.

Comentários

O conjunto de pontos que é equidistante dos eixos coordenados é dado pelas retas

$$y = x$$
$$y = -x$$

Como, para pertencerem ao conjunto F, os pontos também precisam satisfazer a equação $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 2 = 0$, podemos utilizar a substituição para encontrar as coordenadas dos pontos.

Para o caso $y = x$

$$x^2 + x^2 - 2x - 6x + 2 = 0$$
$$2x^2 - 8x + 2 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 64 - 16 = 48$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{48}}{2 \cdot 2} = \begin{cases} x' = \dfrac{8 + 4\sqrt{3}}{4} = 2 + \sqrt{3} \\ x'' = \dfrac{8 - 4\sqrt{3}}{4} = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$$
$$y = x \rightarrow \left(2 + \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}\right) \; e \; \left(2 - \sqrt{3}; 2 - \sqrt{3}\right)$$

Portanto, dois pontos do primeiro quadrante. Vejamos o próximo caso.

$$y = -x$$
$$x^2 + (-x)^2 - 2x - 6(-x) + 2 = 0$$

$$2x^2 + 4x + 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{-4 \pm 0}{2 \cdot 2} = -1$$

$$y = -x \rightarrow (-1; 1)$$

Ou seja, um ponto no segundo quadrante.

Até aqui, tudo bem, temos 3 pontos, dois no primeiro quadrante e um no segundo quadrante, o que poderia indicar a alternativa d) como nosso gabarito.

No entanto, a palavra "círculo", no enunciado, remete à área cercada pela circunferência. Como uma das retas ($y = x$) é secante à circunferência, teríamos infinitos pontos pertencentes ao conjunto F, não só os 3 que achamos.

Além disso, a equação fornecida, $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 2 = 0$, não representa um círculo e sim uma circunferência. Equações de círculo envolvem desigualdades, não igualdades.

Dessa forma, apesar de haver uma indicação de resposta na alternativa d), indico a questão para anulação.

Gabarito: para anulação

23.

Uma cidade é dividida em dois Setores: o Setor Sul, com área de 10 km2, e o Setor Norte, com área de 30 km2. Após um final de semana, foram divulgados os seguintes totais pluviométricos:

Dia	Sul	Norte
sábado	7 mm	11 mm
domingo	9 mm	17 mm

É correto afirmar que o total pluviométrico desse final de semana na cidade inteira foi de

(A) 15 mm.

(B) 17 mm.

(C) 22 mm.

(D) 25 mm.

(E) 28 mm.

Comentários

O total pluviométrico P é, na verdade, uma razão entre o volume de chuva que cai em uma determinada área, ou seja, uma razão entre um volume e uma área.

Seguindo essa definição, temos:

$$P = \frac{10\ Km^2 \cdot (7+9)\ mm + 30\ Km^2 \cdot (11+17)\ mm}{10\ Km^2 + 30\ Km^2}$$

$$P = \frac{(10 \cdot 16 + 30 \cdot 28)\ \cancel{Km^2} \cdot mm}{40\ \cancel{Km^2}}$$

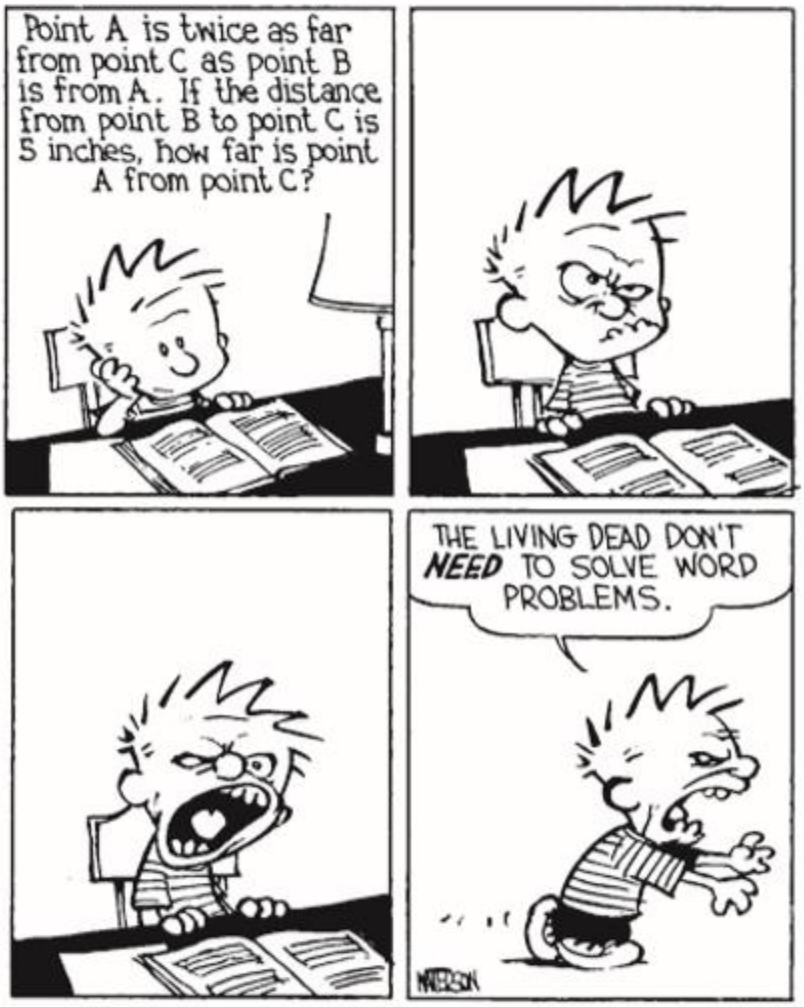
$$P = \frac{160 + 840}{40} mm$$

$$P = \frac{1000}{40} mm$$

$$P = 25\ mm$$

Gabarito: d)

24.



Bill Waterson, *Calvin and Hobbes*. Disponível em https://www.gocomics.com/.

As possíveis soluções, em polegadas (inches, em inglês), para o problema matemático proposto no quadrinho, no caso em que os pontos A, B e C estão em uma mesma reta, são

(A) $\frac{10}{3}$ e 10.

(B) $\frac{10}{3}$, 5 e 10.

(C) $\frac{5}{3}$, $\frac{10}{3}$ e 10.

(D) $\frac{5}{3}$ e 10.

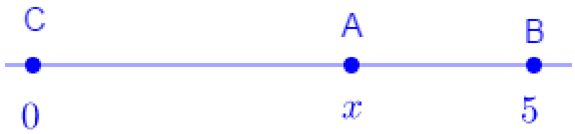
(E) $\frac{10}{3}$ e 5.

Comentários

O texto deixa claro que a distância entre A e C (d_{AC}) é o dobro da distância entre A e B (d_{AC}), ou seja

$$d_{AC} = 2 \cdot d_{AB}$$

Utilizando um sistema ordenado e respeitando a ordem de que A, B e C são colineares, podemos representar os pontos em uma reta orientada.



Dessa forma, seguindo as orientações do enunciado, temos:

$$d_{AC} = 2 \cdot d_{AB}$$
$$x - 0 = 2 \cdot (5 - x)$$
$$x = 10 - 2x$$
$$3x = 10$$
$$x = \frac{10}{3}$$
$$d_{AC} = \frac{10}{3}$$

Até aqui, tudo bem. No entanto, há uma segunda possibilidade para posicionarmos o ponto A, fora do intervalo BC, veja:

Com essa nova representação, mas ainda com a premissa do exercício de que $d_{AC} = 2 \cdot d_{AB}$, temos:

$$d_{AC} = 2 \cdot d_{AB}$$
$$x - 0 = 2 \cdot (x - 5)$$
$$x = 2x - 10$$
$$10 = x$$
$$d_{AC} = 10$$

Assim, temos duas possibilidades para a posição do ponto A, nas condições dadas.

Gabarito: a)

Gabarito

13. E
14. B
15. D
16. C
17. A
18. C
19. C
20. A
21. D
22. ANULAR
23. D
24. A