Estratégia
Vestibulares

Resolução da Prova

Vestibular IME 2020 – 2ª Fase
Matemática

Professor Victor So

Vestibular IME 2020 – 2ª Fase – Matemática

Questão 01.

Sejam a e b raízes da equação $x^2 - 4x + M = 0$, c e d raízes da equação $x^2 - 36x + N = 0$. Sabendo-se que a, b, c, e d formam uma progressão geométrica crescente, determine o valor de $M + N$.

Comentários

Do enunciado, temos:

$$\begin{cases} x^2 - 4x + M = 0 \\ a + b = 4 \\ a \cdot b = M \end{cases}$$

E:

$$\begin{cases} x^2 - 36x + N = 0 \\ c + d = 36 \\ c \cdot d = N \end{cases}$$

Queremos saber $M + N$. Segundo o enunciado (a, b, c, d) forma uma P.G. Então, podemos escrever os números da seguinte forma:

$$(a, a \cdot q, a \cdot q^2, a \cdot q^3)$$

Então:

$$\begin{cases} a + a \cdot q = 4 \\ a \cdot a \cdot q = M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(1+q) = 4\ (eq.1) \\ a^2 \cdot q = M\ (eq.2) \end{cases}$$

Por outro lado:

$$\begin{cases} a \cdot q^2 + a \cdot q^3 = 36 \\ a \cdot q^2 \cdot a \cdot q^3 = N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \cdot q^2 \cdot (1+q) = 36\ (eq.3) \\ a^2 \cdot q^5 = N\ (eq.4) \end{cases}$$

Dividindo (3) por (1), temos:

$$\frac{a \cdot q^2 \cdot (1+q)}{a(1+q)} = \frac{36}{4} \Rightarrow q^2 = 9 \Rightarrow \boxed{q = 3}\ (q > 1)$$

Portanto, $a = 1$.

Diante disso:

$$M = a^2 \cdot q = 1^2 \cdot 3 = 3$$

$$N = a^2 \cdot q^5 = 1^2 \cdot 3^5 = 243$$

Portanto:

$$M + N = 3 + 243$$

$$\boxed{M + N = 246}$$

Gabarito: $M + N = 246$

Questão 02.

Seja uma região **S** no plano complexo que consiste em todos os pontos Z tais que $\frac{Z}{20}$ e $\frac{20}{\bar{Z}}$ possuem partes real e imaginária entre 0 e 1, inclusive. Determine a área da região **S**.

Obs: $\bar{Z}$ é o conjugado do número complexo Z.

Comentários

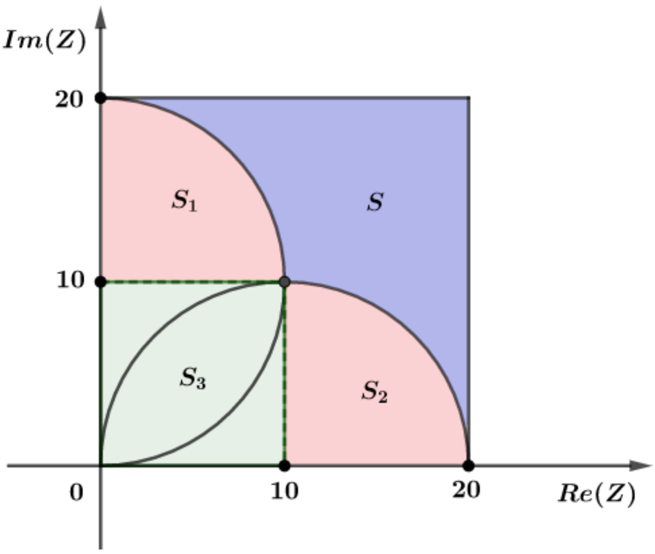
Seja o número complexo $Z = a + bi$, com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$. Então o conjugado de Z é expresso por:

$$\bar{Z} = a - bi$$

Então:

1. $\frac{Z}{20} = \frac{a}{20} + \frac{b}{20}i$, com $0 \leq \frac{a}{20} \leq 1$ e $0 \leq \frac{b}{20} \leq 1$. Então:
$$0 < a < 20 \text{ e } 0 < b < 20$$
2. $\frac{20}{\bar{Z}} = \frac{20(a+bi)}{a^2+b^2} \Rightarrow 0 \leq \frac{20a}{a^2+b^2} \leq 1$ e $0 \leq \frac{20b}{a^2+b^2} \leq 1$. Então:
   a) $0 \leq \frac{20a}{a^2+b^2} \leq 1$:
   $$0 \leq 20a \leq a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 - 20a \geq 0 \Rightarrow a^2 - 20a + 100 + b^2 \geq 100$$
   $$\Rightarrow (a-10)^2 + b^2 \geq 10^2$$
   b) $0 \leq \frac{20b}{a^2+b^2} \leq 1$:
   $$0 \leq 20b \leq a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 - 20b \geq 0$$
   $$\Rightarrow a^2 + (b-10)^2 \geq 10^2$$

Representando a regiões encontradas no plano Argand-Gauss, temos:



Da figura, temos:

$$S_1 = S_2 = \frac{1}{4}\pi(10)^2 = 25\pi$$

$$S_3 = 10^2 = 100$$
$$S + S_1 + S_2 + S_3 = 20^2 = 400$$
$$S = 400 - 100 - 2 \cdot 25\pi = 300 - 50\pi$$
$$\boxed{S = 50(6-\pi)\ u.a.}$$

Gabarito: $\boldsymbol{S = 50(6-\pi)\ u.a.}$

Questão 03.

Os modelos de placas de identificação de automóveis adotadas no Brasil estão sendo atualizados. Atualmente, o modelo antigo ABC1234 (três letras seguidas de quatro algarismos) está sendo gradativamente substituído pelo modelo novo ABC1D23 (três letras seguidas de um algarismo, uma letra e dois algarismos).

Placas de modelos distintos podem apresentar sequências de caracteres alfanuméricos iguais. Por exemplo, a sequência de caracteres "20" aparece nas combinações IME2020 e BRA5P20, enquanto a sequência "A12" aparece nas combinações BRA1234 e IME4A12. Considere a placa do modelo antigo IME2019.

Considere a placa do modelo antigo IME2019. Seja P o conjunto de placas do modelo novo novo que podem ser formadas com alguma sequência de três caracteres em comum com a placa IME2019. Determine o número de elementos de P.

Por exemplo, IME4A12 e BRA5E20 pertencem ao conjunto P. IMP5E19 não pertence ao conjunto P.

Obs: considere o alfabeto com 26 letras

Comentários

O modelo novo de placa tem 7 letras. Vejamos:

Letra	**Letra**	**Letra**	**Número**	**Letra**	**Número**	**Número**

Como queremos que o modelo tenha 3 letras consecutivas iguais às letras presentes em IME2019, vamos avaliar as possibilidades de isso acontecer.

Vamos começar pelas três primeiras casas (que devem ser letra-letra-letra). Observe que, na palavra IME2019, só existe uma sequência de três letras que é **IME.**

Vejamos as casas de 2 a 4 (letra-letra-número). A única sequência letra-letra-número em IME2019 é **ME2**. E, assim, por diante.

A	**I**	**M**	**E**	**Número**	**Letra**	**Número**	**Número**
B	**Letra**	**M**	**E**	**2**	**Letra**	**Número**	**Número**
Impossível	Não existe uma sequência letra-número-letra em IME2019						
Impossível	Não existe uma sequência número-letra-número em IME2019						

C	**Letra**	**Letra**	**Letra**	**Número**	**E**	**2**	**0**

Há, portanto, três possibilidades de sequências de três números. Vejamos:

	Letra	**Letra**	**Letra**	**Número**	**Letra**	**Número**	**Número**	**Total**
A	**I**	**M**	**E**	10	26	10	10	**= 26000**
B	26	**M**	**E**	**2**	26	10	10	**= 67600**
C	26	26	26	10	**E**	**2**	**0**	**= 175760**

Devemos considerar ainda as intersecções.

	Letra	**Letra**	**Letra**	**Número**	**Letra**	**Número**	**Número**	**Total**
$\boldsymbol{A \cap B}$	**I**	**M**	**E**	**2**	26	10	10	**= 2600**
$\boldsymbol{A \cap C}$	**I**	**M**	**E**	10	**E**	**2**	**0**	**= 10**
$\boldsymbol{B \cap C}$	26	**M**	**E**	**2**	**E**	**2**	**0**	**= 26**
$\boldsymbol{A \cap B \cap C}$	**I**	**M**	**E**	**2**	**E**	**2**	**0**	**= 1**

Agora, basta aplicar a união de três conjuntos:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$n(A \cup B \cup C) = 26000 + 67600 + 175760 - 2600 - 10 - 26 + 1 = 2666725$$

Gabarito: 266.725

Questão 04.

Em um jogo, João e Maria possuem cada um três dados não viciados com seis faces numeradas de 1 a 6. Cada um lançará os seus dados, sendo João o primeiro a lançar. O vencedor será aquele que obtiver o maior número de dados com resultados iguais. Em caso de empate, vencerá aquele que tiver o maior número nos dados de igual resultado. Se ainda houver empate, não haverá vencedor. Suponha que João obteve apenas dois dados com mesmo resultado. Qual é a probabilidade de Maria vencer o jogo?

Comentários

Maria vence em dois casos:

- **A:** quando ela tira três números iguais nos dados;
- **B:** quando ela tira dois números iguais, sendo que os dois números são maiores que os que foram tirados por João.

A primeira probabilidade é fácil de ser calculada. O primeiro dado pode ser qualquer um. Porém, os dois seguintes devem ser iguais ao primeiro.

$\frac{6}{6}$	$\cdot\frac{1}{6}$	$\cdot\frac{1}{6}$	$P(A) = \frac{1}{36}$

1º dado	2º dado	3º dado	

A segunda probabilidade deve ser calculada considerando que:

- Maria deve tirar exatamente dois números iguais;
- Esses números não podem ser iguais aos que foram tirados por João;
- Sabendo que Maria e João não tiraram dois números iguais, a probabilidade condicional de vitória de Maria é ½. Em metade dos casos, Maria ganha. Na outra metade, João ganha.

$(6-1)$	$\frac{1}{2}$	$C_{3,2}$	$\left(\frac{5}{6}\right)$	$\left(\frac{1}{6}\right)^2$
Números que não resultam em empate	**Probilidade de Maria vencer, sabendo que não houve empate**	**Permutações entre os dados**	**1 Número Diferente**	**2 Números Iguais**

Logo, temos:

$$P(B) = (6-1).\frac{1}{2}.C_{3,2}.\left(\frac{5}{6}\right).\left(\frac{1}{6}\right)^2$$

$$P(B) = 5.\frac{1}{2}.3.\left(\frac{5}{6}\right).\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{25}{144}$$

Portanto, a probabilidade de Maria vencer é:

$$P = P(A) + P(B) = \frac{1}{36} + \frac{25}{144} = \frac{29}{144}$$

Outra forma de calcular a probabilidade **P(B)** é considerar que:

- Se João tirar um par de “1”, Maria pode tirar “2,3,4,5 ou 6”, portanto, tem 5 possibilidades de vitória;
- Se João tirar um par de “2”, Maria pode tirar “3,4,5 ou 6”, portanto, tem 4 possibilidades de vitória;
- Se João tirar um par de “3”, Maria pode tirar “4,5 ou 6”, portanto, tem 3 possibilidades de vitória;
- Se João tirar um par de “4”, Maria pode tirar “5 ou 6”, portanto, tem 2 possibilidades de vitória;
- Se João tirar um par de “5”, Maria pode tirar “6”, portanto, tem 1 possibilidades de vitória;
- Se João tirar um par de “6”, Maria não tem possibilidade de vitória.

Considerando que a probabilidade de João ter tirado qualquer número é igual a 1/6, o valor esperado da quantidade de números vencedores para Maria é:

$$E = \frac{1}{6}.5 + \frac{1}{6}.4 + \frac{1}{6}.3 + \frac{1}{6}.2 + \frac{1}{6}.1 + \frac{1}{6}.0 = \frac{1}{6}(5+4+3+2+1) = \frac{5.6}{2.6} = \frac{5}{2}$$

Agora, façamos:

$\frac{5}{2}$	$C_{3,2}$	$\left(\frac{5}{6}\right)$	$\left(\frac{1}{6}\right)^2$
Valor Esperado de Números Vencedores	**Permutações entre os dados**	**1 Número Diferente**	**2 Números Iguais ao Vencedor**

O resultado é exatamente o mesmo:

$$P(B) = \frac{5}{2} . 3 . \left(\frac{5}{6}\right) . \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{25}{144}$$

Portanto, também chegaríamos ao mesmo resultado encontrado anterior:

$$P = P(A) + P(B) = \frac{1}{36} + \frac{25}{144} = \frac{29}{144}$$

Gabarito: 29/144

Questão 05.

Uma matriz A é semelhante a uma matriz B se e somente se existe uma matriz invertível P tal que $A = P\ B\ P^{-1}$.

a) Se A e B forem semelhantes, mostre que $\det(A) = \det(B)$.

b) Dadas $C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ $e\ D = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, verifique se essas matrizes são semelhantes.

Comentários

a) Pelo Teorema de Binet, temos que:

$$\det(A) = \det(P) . \det(B) . \det(P^{-1})$$

Como a matriz **P** é inversível, podemos usar que o determinante da matriz inversa é o inverso do determinante.

$$\det(A) = \det(P) . \det(B) . \frac{1}{\det(P)}$$

$$\therefore \det(A) = \det(B)$$

b) Podemos utilizar o teorema de que A e B são semelhantes se, e somente se:

- $\det(A) = \det(B)$
- A e B possuem o mesmo polinômio característico;
- A e B possuem o mesmo traço;

Vamos à primeira condição:

$$\det C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = 4.5 - 3.2 = 20 - 6 = 14$$

$$\det D = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = 8.1 - 3.(-20) = 8 + 6 = 14$$

Logo, a primeira condição está atendida. Vamos checar os polinômios característicos;

$$\det(C-\lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(5-\lambda) - 3.2 = 20 - 4\lambda - 5\lambda + \lambda^2 - 6$$
$$\det(C-\lambda I) = \lambda^2 - 9\lambda + 14$$

$$\det(D-\lambda I) = \begin{vmatrix} 8-\lambda & -2 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (8-\lambda)(1-\lambda) - 3.(-2) = 8 - 8\lambda - \lambda + \lambda^2 + 6$$
$$\det(D-\lambda I) = \lambda^2 - 9\lambda + 14$$

Logo, a segunda condição está atendida.

Se os polinômios característicos são iguais, então os autovetores são iguais e possuem a mesma multiplicidade.

Os traços de C e D são:

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \therefore \mathrm{tr}\,(\mathrm{C}) = 4 + 5 = 9$$
$$D = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \therefore \mathrm{tr}\,(\mathrm{D}) = 8 + 1 = 9$$

Portanto, as matrizes C e D são semelhantes.

Outra forma de resolver é utilizar a definição do enunciado:

$$C = PDP^{-1}$$

Multiplicando por P à direita:

$$\therefore CP = PB$$

Consideremos uma matriz P genérica:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Fazendo as multiplicações:

$$\begin{bmatrix} 4\mathrm{a}+2\mathrm{c} & 4\mathrm{b}+2\mathrm{d} \\ 3\mathrm{a}+5\mathrm{c} & 3\mathrm{b}+5\mathrm{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8\mathrm{a}+3\mathrm{b} & -2\mathrm{a}+\mathrm{b} \\ 8\mathrm{c}+3\mathrm{d} & -2\mathrm{c}+\mathrm{d} \end{bmatrix}$$

Agora, devemos aplicar a identidade matricial:

$$4a + 2c = 8a + 3b \therefore 4a + 3b - 2c = 0\ (I)$$
$$4b + 2d = -2a + b \therefore -2a - 3b - 2d = 0\ (II)$$
$$3a + 5c = 8c + 3d \therefore a = c + d\ (III)$$
$$3b + 5d = -2c + d \therefore 3b + 2c + 4d = 0\ (IV)$$

Precisamos encontrar uma solução para o sistema, de modo que a matriz P seja invertível. Substituindo (III) em (II), temos:

$$2a = 3b - 2d$$

$$2(c+d)=3b-2d$$
$$2c+2d=3b-2d$$
$$3b-4d+2c=0\ (V)$$

Comparando (V) e (IV), temos que:

$$3b+2c+4d=0\ (IV)$$
$$3b-4d+2c=0(V)$$

Logo temos que:

$$d=0$$

De (II), temos que:

$$-2a-3b-2d=0$$
$$-2a-3b=0$$
$$\therefore a=-\frac{3b}{2}\ (VI)$$

De (I), temos que:

$$4a+3b-2c=0$$
$$-6b+3b-2c=0$$
$$-3b-2c=0$$
$$\therefore c=-\frac{3b}{2}\ (VII)$$

De (IV), temos:

$$3b+2c+4d=0$$
$$3b+2c=0$$
$$\therefore c=-\frac{3b}{2}$$

Portanto, o sistema é indeterminado. Basta fazer b = 2 para encontrarmos um dos possíveis valores para a matriz P:

$$P=\begin{bmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz P encontrada é inversível, pois:

$$\det(P)=(-3).0-(-3).2=-6\neq 0$$

Logo, encontramos uma matriz P tal que $C = PDP^{-1}$, portanto, C e D são inversíveis.

Gabarito: a) Demonstração b) C e D são inversíveis.

Questão 06.

Sabendo que i 2 = −1, encontre todos os valores reais de x que satisfazem a seguinte inequação:

$$Re\left\{\frac{2.\log_2(\,sen\ x) + 1}{i(e^{2ix} - 2\cos^2 x + 1)}\right\} > 0$$

onde Re$\{Z\}$ é a parte real do número complexo Z.

Comentários

Vamos trabalhar com a expressão fornecida.

$$S = \frac{\log_2(sen^2 x) + 1}{i.(cos2x + i.sen2x - 2\cos^2 x + 1)}$$

Usando o cosseno do arco duplo, temos:

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\therefore \cos 2x - 2\cos^2 x + 1 = 0$$

Portanto, a expressão S é um número real puro:

$$S = \frac{\log_2(sen^2 x) + 1}{i.(0 + i.sen2x)}$$

$$S = \frac{\log_2(sen^2 x) + 1}{i^2.sen\ 2x} = -\frac{\log_2(2sen^2 x)}{sen\ 2x}$$

Podemos usar outra expressão para o cosseno do arco duplo:

$$\cos 2x = 1 - 2\,sen^2 x$$

$$\therefore 2sen^2 x = 1 - \cos 2x$$

Logo, temos:

$$Re\{S\} = S = -\frac{\log_2(1 - \cos 2x)}{sen\ 2x}$$

Portanto, para que a parte real de S seja positiva, temos que o numerador e o denominador devem ter sinais opostos:

- $\log_2(1 - \cos 2x) > 0\ e\ sen\ 2x < 0$

$$\log_2(1 - \cos 2x)\ > 0$$

$$\therefore 1 - \cos 2x > 1$$

$$-\cos 2x > 0$$

$$\cos 2x < 0$$

Temos, portanto, que $\cos 2x < 0$ e sen $2x < 0$. Logo, o arco **2x** está no terceiro quadrante:

$$\pi + 2k\pi < 2x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, com\ k \in Z$$

$$\therefore \frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + k\pi$$

- $\log_2(1 - \cos 2x) < 0 \; e \; sen \; 2x > 0$

$$\log_2(1 - \cos 2x) \; < 0$$
$$\therefore 1 - \cos 2x < 1$$
$$-\cos 2x < 0$$
$$\cos 2x > 0$$

Temos, portanto, que $\cos 2x > 0$ e $\operatorname{sen} 2x > 0$. Logo, o arco **2x** está no primeiro quadrante:

$$0 + 2k\pi < 2x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, com \; k \in Z$$
$$\therefore k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi$$

Portanto, o conjunto solução é a união das duas soluções encontradas:

$$S = \left\{x \in R \mid k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi \; ou \frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + k\pi, com \; k \in Z\right\}$$

Gabarito: $\boldsymbol{S = \left\{x \in R \mid k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi \; ou \frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + k\pi, com \; k \in Z\right\}}$

Questão 07.

Seja $\frac{1}{b} = sen\frac{\pi}{14} \cdot sen\frac{3\pi}{14} \cdot sen\frac{5\pi}{14}$. Determine b, onde b pertence ao conjunto dos números inteiros não nulos.

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte expressão:

$$E = sen\left(\frac{\pi}{14}\right) \cdot sen\left(\frac{3\pi}{14}\right) \cdot sen\left(\frac{5\pi}{14}\right)$$

Multiplicando os dois lados por $2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{14}\right)$, temos:

$$2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{14}\right) \cdot E = \underbrace{2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{14}\right) \cdot sen\left(\frac{\pi}{14}\right)}_{sen\left(2 \cdot \frac{\pi}{14}\right)} \cdot sen\left(\frac{3\pi}{14}\right) \cdot sen\left(\frac{5\pi}{14}\right)$$

$$2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{14}\right) \cdot E = sen\left(\frac{\pi}{7}\right) \cdot sen\left(\frac{3\pi}{14}\right) \cdot sen\left(\frac{5\pi}{14}\right)$$

Entretanto:

$$\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{7}=\frac{5\pi}{14}\Rightarrow \cos\left(\frac{5\pi}{14}\right)=sen\left(\frac{\pi}{7}\right)$$

Logo:

$$2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)\cdot E=\underbrace{sen\left(\frac{5\pi}{14}\right)\cdot\cos\left(\frac{5\pi}{14}\right)}_{\frac{sen\left(2\cdot\frac{5\pi}{14}\right)}{2}}\cdot sen\left(\frac{3\pi}{14}\right)$$

$$2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)\cdot E=\frac{1}{2}\cdot sen\left(\frac{5\pi}{7}\right)\cdot sen\left(\frac{3\pi}{14}\right)$$

Por outro lado:

$$\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{7}=-\frac{3\pi}{14}\Rightarrow \cos\left(-\frac{3\pi}{14}\right)=sen\left(\frac{5\pi}{7}\right)\Rightarrow \cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)=sen\left(\frac{5\pi}{7}\right)$$

$$2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)\cdot E=\frac{1}{2}\cdot\underbrace{\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)\cdot sen\left(\frac{3\pi}{14}\right)}_{\frac{sen\left(2\cdot\frac{3\pi}{14}\right)}{2}}$$

$$2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)\cdot E=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot sen\left(\frac{3\pi}{7}\right)$$

Mas:

$$\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{14}=\frac{3\pi}{7}\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{14}\right)=sen\left(\frac{3\pi}{7}\right)$$

Portanto:

$$E=\frac{1}{8}=\frac{1}{b}$$

$$\therefore \boxed{b=8}$$

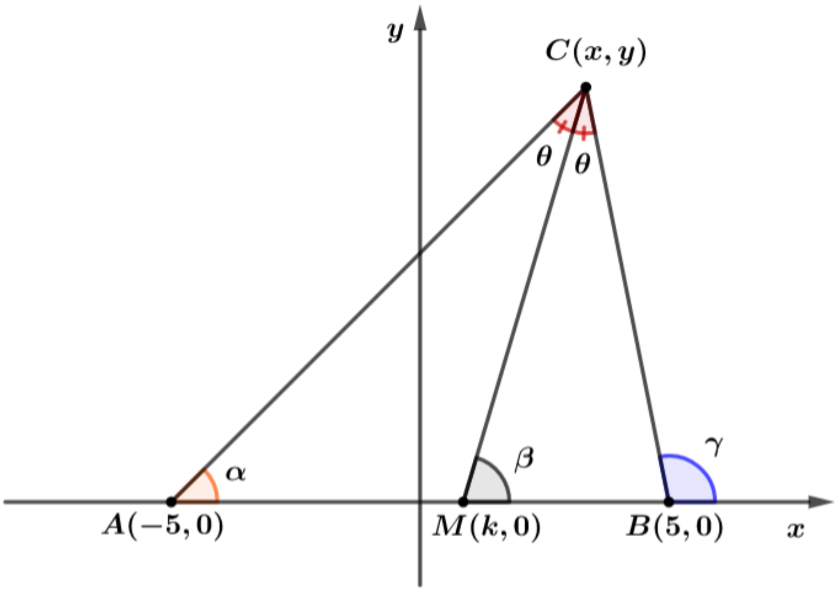
Gabarito: $b=8$.

Questão 08.

Os pontos $A(-5,0)$ e $B(5,0)$ definem um dos lados do triângulo ABC. A bissetriz interna do ângulo correspondente ao vértice C é paralela à reta de equação $14x-2y+1=0$. Determine o valor da excentricidade do lugar geométrico definido pelo vértice C deste triângulo.

Comentários

Solução 1) Representando a figura do enunciado, temos:



$\overline{CM}$ é a bissetriz interna do triângulo ABC, a questão afirma que ela é paralela à reta $14x - 2y + 1 = 0$, logo, a reta $\overline{CM}$ deve possuir o mesmo coeficiente angular:

$$14x - 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = 7x + \frac{1}{2} \Rightarrow m = 7$$

Assim, o coeficiente angular da reta $\overline{CM}$ é:

$$\boxed{m_{CM} = tg\beta = 7}$$

A reta $\overline{CM}$ é dada por:

$$y = 7(x - k)$$

Logo:

$$\boxed{k = x - \frac{y}{7}}$$

Aplicando o teorema da bissetriz interna, temos:

$$\frac{AC}{AM} = \frac{BC}{BM} \Rightarrow \frac{\sqrt{(x+5)^2 + y^2}}{k+5} = \frac{\sqrt{(x-5)^2 + y^2}}{5-k}$$

Elevando ao quadrado:

$$(5-k)^2(x^2 + 10x + 25 + y^2) = (k+5)^2(x^2 - 10x + 25 + y^2)$$

$$(25 - 10k + k^2)(x^2 + 10x + 25 + y^2) = (k^2 + 10k + 25)(x^2 - 10x + 25 + y^2)$$

$$\cancel{25x^2} + 250x + \cancel{625} + \cancel{25y^2} - 10kx^2 \cancel{-100kx} - 250k - 10ky^2 + \cancel{k^2x^2} + 10k^2x + \cancel{25k^2} + \cancel{k^2y^2}$$
$$= \cancel{k^2x^2} - 10k^2x + \cancel{25k^2} + \cancel{k^2y^2} + 10kx^2 \cancel{-100kx} + 250k + 10ky^2 + \cancel{25x^2} - 250x + \cancel{625} + \cancel{25y^2}$$

$$500x - 20kx^2 - 500k - 20ky^2 + 20k^2x = 0$$

$$25x - 25k - kx^2 - ky^2 + k^2x = 0$$
$$25(x-k) - kx(x-k) - ky^2 = 0$$

Substituindo o valor de k:

$$25\left(x - \left(x - \frac{y}{7}\right)\right) - \left(x - \frac{y}{7}\right)x\left(x - \left(x - \frac{y}{7}\right)\right) - \left(x - \frac{y}{7}\right)y^2 = 0$$
$$\frac{25y}{7} - \frac{x(7x-y)}{7}\left(\frac{y}{7}\right) - \frac{7xy^2}{7} + \frac{y^3}{7} = 0$$
$$175y - 7x^2y + xy^2 - 49xy^2 + 7y^3 = 0$$

Como $y \neq 0$, temos:

$$175 - 7x^2 - 48xy + 7y^2 = 0$$
$$\underbrace{7}_{A}x^2 + \underbrace{48}_{B}xy\underbrace{-7}_{C}y^2 - 175 = 0$$

Fazendo a rotação de modo a eliminar o termo misto, temos:

$$tg(2\theta) = \frac{B}{A-C}$$
$$tg(2\theta) = \frac{48}{14} = \frac{24}{7}$$
$$\frac{2tg\theta}{1-tg^2\theta} = \frac{24}{7}$$
$$24tg^2\theta + 14tg\theta - 24 = 0$$
$$12tg^2\theta + 7tg\theta - 12 = 0$$

Encontrando as soluções:

$$tg\theta = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 4 \cdot 144}}{24} = \frac{-7 \pm \sqrt{625}}{24} = \frac{-7 \pm 25}{24}$$
$$tg\theta_1 = \frac{3}{4} \; ou \; tg\theta_2 = -\frac{4}{3}$$

Vamos usar $tg\theta = 3/4$, aplicando a transformação de coordenadas:

$$\cos\theta = \frac{4}{5} \text{ e } sen\theta = \frac{3}{5}$$
$$\begin{cases} x = X \cdot \cos\theta - Y \cdot \operatorname{sen}\theta \\ y = X \cdot \operatorname{sen}\theta + Y \cdot \cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{5}X - \frac{3}{5}Y \\ y = \frac{3}{5}X + \frac{4}{5}Y \end{cases}$$
$$7\left(\frac{4}{5}X - \frac{3}{5}Y\right)^2 + 48\left(\frac{4}{5}X - \frac{3}{5}Y\right)\left(\frac{3}{5}X + \frac{4}{5}Y\right) - 7\left(\frac{3}{5}X + \frac{4}{5}Y\right)^2 - 175 = 0$$

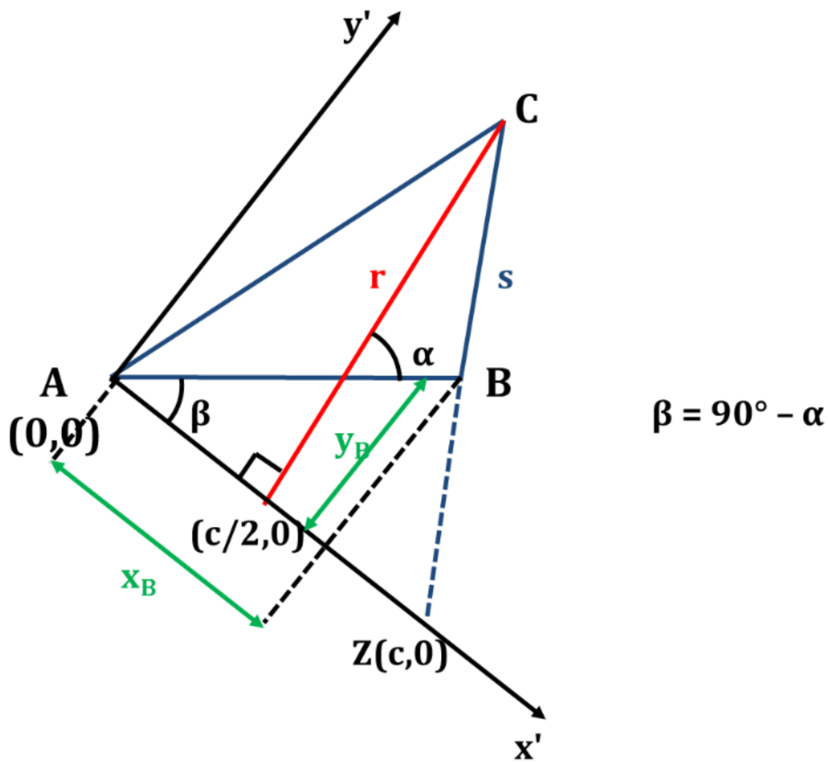
$$\frac{7}{25}(16X^2 - \cancel{24XY} + 9Y^2) + \frac{48}{25}(12X^2 - 12Y^2) - \frac{7}{25}(9X^2 + \cancel{24XY} + 16Y^2) - 175 = 0$$

$$7 \cdot 16X^2 + 7 \cdot 9Y^2 + 48 \cdot 12X^2 - 48 \cdot 12Y^2 - 7 \cdot 9X^2 - 7 \cdot 16Y^2 - 175 \cdot 25 = 0$$
$$(49 + 48 \cdot 12)X^2 - (49 + 48 \cdot 12)Y^2 - 175 \cdot 25 = 0$$
$$625X^2 - 625Y^2 - 7 \cdot 625 = 0$$
$$X^2 - Y^2 = 7$$

Portanto, temos a equação de uma hipérbole equilátera. Logo, sua excentricidade é

$$\boxed{e = \sqrt{2}}$$

Solução 2) Para facilitar a resolução da questão, podemos utilizar uma rotação do eixo de coordenadas em torno do ponto A. Para isso, tomemos o eixo **y’** como paralelo à reta que é a bissetriz fornecida no enunciado e o eixo **x’** é perpendicular a **y’** passando no ponto A.



Definimos também o ponto Z(c,0) como o encontro entre a reta **s** e o eixo **x’**. Devemos observar que a reta **r** é altura e bissetriz no triângulo ABZ, portanto, é também mediana do lado AZ, como mostrado no desenho.

O ponto **C** desejado é o encontro das retas **r** e **s**.

Primeiramente, vamos calcular as coordenadas do ponto B nesse novo sistema de coordenadas. Note que a mera rotação do eixo de coordenadas não altera a distância AB = 10. Além disso, as projeções de B formam um triângulo retângulo que possui um dos ângulos como o arco tangente de 1/7.

$$x_B^2 + y_B^2 = 10^2$$

$$y_B = \frac{x_B}{7} \therefore x_B = 7y_B$$

Agora, podemos calcular as novas coordenadas de B.

$$(7y_B)^2 + y_B^2 = 10^2$$

$$49y_B^2 + y_B^2 = 100$$

$$50y_B^2 = 100$$

$$\therefore y_B^2 = \frac{100}{50} = 2 \therefore y_B = \sqrt{2}$$

Façamos a conta de **x_B.**

$$x_B = 7y_B = 7\sqrt{2}$$

A reta **r** é paralela ao eixo **y'**. Portanto, a sua equação é dada por:

$$r: x' = \frac{c}{2}$$

A reta **s** é dada pelos pontos $B(7\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e $(c, 0)$. Sua equação pode ser expressa em função do coeficiente angular:

$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{2} - 0}{7\sqrt{2} - c} = \frac{\sqrt{2}}{7\sqrt{2} - c}$$

Podemos agora obter o coeficiente linear da reta **n** considerando que $(c, 0)$ pertence à reta **s**.

$$y' = m_s x' + n_s$$

$$0 = m_s . c + n_s$$

$$\therefore n_s = -m_s c = -\frac{\sqrt{2}}{7\sqrt{2} - c} . c = \frac{\sqrt{2}}{7\sqrt{2} - c} . (-c)$$

Logo, a equação da reta **s** é:

$$s: y' = m_s x' + n_s = \frac{\sqrt{2}}{7\sqrt{2} - c} . x' + \frac{\sqrt{2}}{7\sqrt{2} - c} . (-c)$$

$$s: y' = \frac{\sqrt{2}}{7\sqrt{2} - c}[x' - c]$$

Note que o ponto C é o encontro das retas **r** e **s**. Portanto, basta resolver o sistema de equações definido pelas duas equações de reta.

$$r: x' = \frac{c}{2} \therefore c = 2x'$$

Substituindo o parâmetro **c** na equação da reta **s** é:

$$s: y' = \frac{\sqrt{2}}{7\sqrt{2} - c}[x' - c] = \frac{\sqrt{2}}{7\sqrt{2} \boldsymbol{- 2x'}}[x' \boldsymbol{- 2x'}]$$

Fazendo as manipulações algébricas.

$$y' = \frac{\sqrt{2}}{7\sqrt{2} - 2x'}[x' - 2x'] = \frac{\sqrt{2}}{7\sqrt{2} - 2x'}[-x']$$

Passando o denominador para o outro lado, temos:

$$\therefore y'(7\sqrt{2} - 2x') = \sqrt{2}[-x']$$

$$7\sqrt{2}y' - 2x'y' = \sqrt{2}[-x']$$

$$\therefore \sqrt{2}x' + 7\sqrt{2}y' - 2x'y' = 0$$

$$x'y' - \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{7\sqrt{2}}{2}y' = 0$$

Podemos fatorar a equação obtida, observando que:

$$\left(x' - \frac{7\sqrt{2}}{2}\right)\left(y' - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = x'y' - \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{7\sqrt{2}}{2}y' + \frac{7}{2}$$

Portanto, temos que a equação da curva é:

$$x'y' - \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{7\sqrt{2}}{2}y' = 0$$

$$\left(x' - \frac{7\sqrt{2}}{2}\right)\left(y' - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{7}{2} = 0$$

$$\left(x' - \frac{7\sqrt{2}}{2}\right)\left(y' - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{7}{2}$$

Trata-se, portanto de uma hipérbole equilátera deslocada da origem. Portanto, a sua excentricidade é igual a $\sqrt{2}$.

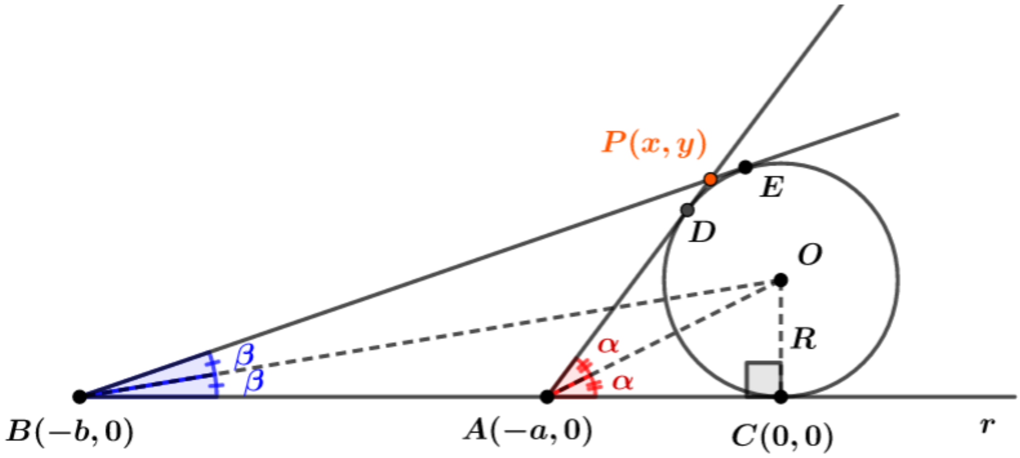
Gabarito: Hipérbole de excentricidade $\sqrt{2}$

Questão 09.

Sobre uma reta r são marcados três pontos distintos A, B e C, sendo que C é um ponto externo ao segmento de reta $\overline{AB}$. Determine o lugar geométrico das interseções das retas tangentes a partir de A e B a qualquer circunferência tangente à reta r no ponto C. Justifique sua resposta.

Comentários

Sem perda de generalidade, consideremos a seguinte figura que representa o problema:



$\overline{AD}$ e $\overline{BE}$ são as retas tangentes à circunferência tangente à reta r no ponto C. Para simplificar os cálculos, consideramos a reta r como a reta coincidente com o eixo das abcissas. Sabendo que a equação de uma reta é

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Temos para a reta $\overline{AD}$:

$$y - y_A = m_{AD}(x - x_A) \Rightarrow y = (x + a) \cdot tg(2\alpha) \ \ (eq. I)$$

Para a reta $\overline{BE}$:

$$y - y_B = m_{BE}(x - x_B) \Rightarrow y = (x + b) \cdot tg(2\beta) \ \ (eq. II)$$

A interseção da reta $\overline{AD}$ e a reta $\overline{BE}$ é o ponto $P(x, y)$. Igualando as equações das retas, temos:

$$(x + a) \cdot tg(2\alpha) = (x + b) \cdot tg(2\beta) \ \ (eq. III)$$

Pela figura, vemos que:

$$tg\alpha = \frac{R}{a} \text{ e } tg\beta = \frac{R}{b}$$

Pelas relações trigonométricas, temos:

$$tg(2\alpha) = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} \Rightarrow tg(2\alpha) = \frac{2\left(\frac{R}{a}\right)}{1 - \left(\frac{R}{a}\right)^2} \Rightarrow \boxed{tg(2\alpha) = \frac{2Ra}{a^2 - R^2}}$$

$$tg(2\beta)=\frac{2tg\beta}{1-tg^2\beta}\Rightarrow tg(2\beta)=\frac{2\left(\frac{R}{b}\right)}{1-\left(\frac{R}{b}\right)^2}\Rightarrow \boxed{tg(2\beta)=\frac{2Rb}{b^2-R^2}}$$

Substituindo os valores encontrados na $eq.I$:

$$(x+a)\cdot\left(\frac{2Ra}{a^2-R^2}\right)=(x+b)\cdot\left(\frac{2Rb}{b^2-R^2}\right)$$

$$(x+a)(b^2-R^2)2Ra=(x+b)(a^2-R^2)2Rb$$

$$a(xb^2-xR^2+ab^2-aR^2)=b(xa^2-xR^2+a^2b-bR^2)$$

$$axb^2-axR^2+\cancel{a^2b^2}-a^2R^2=bxa^2-bxR^2+\cancel{a^2b^2}-b^2R^2$$

$$ab^2x-a^2bx-aR^2x+bR^2x-a^2R^2+b^2R^2=0$$

$$abx(b-a)+R^2x(b-a)+R^2\underbrace{(b^2-a^2)}_{(b-a)(b+a)}=0$$

Como $b\neq a$, temos:

$$abx+R^2x+R^2(a+b)=0$$

$$\boxed{x=-\frac{R^2(a+b)}{ab+R^2}}$$

Substituindo o valor de x na equação I, obtemos:

$$y=\left(-\frac{R^2(a+b)}{ab+R^2}+a\right)\cdot\left(\frac{2Ra}{a^2-R^2}\right)$$

Simplificando:

$$y=\frac{2Ra(-\cancel{aR^2}-bR^2+a^2b+\cancel{aR^2})}{(ab+R^2)(a^2-R^2)}$$

$$y=\frac{2Rab\cancel{(a^2-R^2)}}{(ab+R^2)\cancel{(a^2-R^2)}}$$

$$\boxed{y=\frac{2Rab}{(ab+R^2)}}$$

Escrevendo R^2 em função de x:

$$x=-\frac{R^2(a+b)}{ab+R^2}\Rightarrow abx+R^2x=-aR^2-bR^2\Rightarrow R^2(a+b+x)=-abx$$

$$\therefore R^2=-\frac{abx}{a+b+x}$$

Substituindo em y:

$$y=\frac{2Rab}{(ab+R^2)}\Rightarrow y^2=\frac{4a^2b^2R^2}{(ab+R^2)^2}\Rightarrow y^2=\frac{\left(4a^2b^2\left(-\frac{abx}{a+b+x}\right)\right)}{\left(ab-\frac{abx}{a+b+x}\right)^2}$$

$$\Rightarrow y^2=\frac{4\cancel{a^2b^2}\left(-\frac{abx}{a+b+x}\right)}{\cancel{a^2b^2}\left(1-\frac{x}{a+b+x}\right)^2}\Rightarrow y^2=\frac{-\frac{4abx}{\cancel{(a+b+x)}}}{\frac{(a+b\cancel{+x-x})^2}{(a+b+x)^{\cancel{2}}}}\Rightarrow y^2=-\frac{4abx(a+b+x)}{(a+b)^2}$$

$$y^2+\frac{4ab(a+b)x}{(a+b)^2}+\frac{4abx^2}{(a+b)^2}=0$$

$$y^2+\frac{4ab}{(a+b)^2}\left(\underbrace{x^2+2\frac{(a+b)}{2}x+\frac{(a+b)^2}{4}}_{\left(x+\frac{a+b}{2}\right)^2}-\frac{(a+b)^2}{4}\right)=0$$

$$y^2+\frac{4ab}{(a+b)^2}\left(x+\frac{a+b}{2}\right)^2-ab=0$$

$$\frac{\left(x+\frac{a+b}{2}\right)^2}{\frac{(a+b)^2}{4ab}}+y^2=ab$$

$$\therefore\ \boxed{\frac{\left(x+\frac{a+b}{2}\right)^2}{\frac{(a+b)^2}{4}}+\frac{y^2}{ab}=1}$$

Portanto, o lugar geométrico dos pontos que satisfazem às condições do problema é uma elipse.

Gabarito: Elipse

Questão 10.

Um determinado material radioativo, com volume inicial Q_0, é manipulado numa usina nuclear. A cada dia o resíduo impuro da substância é descartado, através de uma ligação por um pequeno orifício, num invólucro lacrado em formato de paralelepípedo retângulo. No primeiro dia, a quantidade D_1 descartada corresponde a 1/3 do volume inicial do material e, de um modo geral, a quantidade D_n descartada no n-ésimo dia é dada pela relação:

$$D_n=\frac{1}{3}D_{n-1},\text{ para } n\geq 2.$$

Determine as dimensões do invólucro (altura, largura e profundidade) onde se armazena o material descartado de modo que o custo de fabricação seja mínimo (isto é, a superfície lateral tenha área mínima) e tenha capacidade prevista de armazenamento por tempo indeterminado.

Comentários

Note que pela relação dada, temos que a quantidade descartada é uma progressão geométrica decrescente de razão $q = 1/3$ cujo primeiro termo é $D_1 = Q_0/3$.

$$\left(\frac{Q_0}{3}, \frac{Q_0}{3^2}, \dots, \frac{Q_0}{3^n}, \dots\right)\ P.G.$$

Aplicando a fórmula da soma para a P.G. infinita temos que o volume total descartado é:

$$V = D_1 + D_2 + D_3 + \cdots = \frac{D_1}{1-q} = \frac{\left(\frac{Q_0}{3}\right)}{1-\left(\frac{1}{3}\right)} \therefore V = \frac{Q_0}{2}$$

Sejam a, b, c as dimensões do invólucro que armazenarão o volume descartado. Para guardar todo o lixo radioativo, devemos ter:

$$V_{invólucro} = abc = \frac{Q_0}{2}$$

Como queremos que o custo de fabricação seja mínimo, a área da superfície lateral do invólucro deve ser mínima. A área da superfície lateral é dada por:

$$S_{superfície} = 2(ab + ac + bc)$$

Para minimizar esse valor, basta encontrar o mínimo da expressão $ab + ac + bc$. Podemos usar a desigualdade das médias $MA \geq MG$:

$$\frac{ab + ac + bc}{3} \geq \sqrt[3]{ab \cdot ac \cdot bc}$$

$$ab + ac + bc \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2}$$

Substituindo abc pelo volume descartado:

$$ab + ac + bc \geq 3\sqrt[3]{\left(\frac{Q_0}{2}\right)^2}$$

O mínimo valor ocorre quando $MA = MG$, logo:

$$ab + ac + bc = 3\sqrt[3]{\left(\frac{Q_0}{2}\right)^2}$$

A desigualdade das médias ocorre se, e somente se, os termos envolvidos são iguais, logo:

$$ab = ac = bc = \sqrt[3]{\left(\frac{Q_0}{2}\right)^2}$$

Dessa forma, temos $a = b = c$, ou seja, as dimensões do invólucro pedido são:

$$\boxed{a = b = c = \sqrt[3]{\frac{Q_0}{2}}}$$

Gabarito: $\boldsymbol{a = b = c = \sqrt[3]{\frac{Q_0}{2}}}$
