Prova Resolvida Matemática ITA - 2020

Professor Victor So

QUESTÕES ITA

41. (ITA/2020)

Sejam $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ números reais tais que $2^{x_1} = 4; 3^{x_2} = 5; 4^{x_3} = 6; 5^{x_4} = 7; 6^{x_5} = 8$ e $7^{x_6} = 9$. Então, o produto $x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ é igual a

a) 6.

b) 8.

c) 10.

d) 12.

e) 14.

42. (ITA/2020)

Sejam a, b e c números reais, $a \neq 0$, tais que $a^2 + b^2 = c^2$. Se a, b e c formam, nessa ordem, uma progressão geométrica de razão k, então o produto P e a soma S de todos os possíveis valores para k são iguais a

a) $P = 1$ e $S = 0$.

b) $P = -1$ e $S = 1$.

c) $P = -1$ e $S = -1$.

d) $P = \frac{-(1+\sqrt{5})}{2}$ e $S = 0$.

e) $P = \frac{(1+\sqrt{5})^2}{4}$ e $S = 0$.

43. (ITA/2020)

A parte real da soma infinita da progressão geométrica cujo termo geral a_n é dado por

$$a_n = \frac{\cos n + i \cdot sen\, n}{2^n}, n = 1, 2, 3, \ldots$$

é igual a

a) $\frac{-1+2\cos 1}{5-4\cos 1}$

b) $\frac{-2+4\cos 1}{5-4\cos 1}$

c) $\frac{4-2\cos 1}{5-4\cos 1}$

d) $\frac{1+2\cos 1}{5-4\cos 1}$

e) $\frac{2+4\cos 1}{5-4\cos 1}$

44. (ITA/2020)

Duas curvas planas c_1 e c_2 são definidas pelas equações

$$c_1: 16x^2 + 9y^2 - 224x - 72y + 640 = 0,$$

$$c_2: x^2 + y^2 + 4x - 10y + 13 = 0.$$

Sejam P e Q os pontos de interseção de c_1 com o eixo x e R e S os pontos de interseção de c_2 com o eixo y. A área do quadrilátero convexo de vértices P, Q, R e S é igual a

a) $15 + 7\sqrt{3}$.

b) $15 - 7\sqrt{3}$.

c) $15 + 14\sqrt{3}$.

d) $15 - 14\sqrt{3}$.

e) $25 + 10\sqrt{3}$.

45. (ITA/2020)

A cada aniversário, seu bolo tem uma quantidade de velas igual à sua idade. As velas são vendidas em pacotes com 12 unidades e todo ano é comprado apenas um novo pacote. As velas remanescentes são guardadas para os anos seguintes, desde o seu primeiro aniversário. Qual a sua idade, em anos, no primeiro ano em que as velas serão insuficientes?

a) 12.

b) 23.

c) 24.

d) 36.

e) 38.

46. (ITA/2020)

Seja A um ponto externo a circunferência λ de centro O e raio r. Considere uma reta passando por A e secante a λ nos pontos C e D tal que o segmento AC é externo a λ e tem comprimento igual a r. Seja B o ponto de λ tal que O pertence ao segmento AB. Se o ângulo $B\hat{A}D$ mede $10°$, então a medida do ângulo $B\hat{O}D$ é igual a

a) $25°$.

b) $30°$.

c) $35°$.

d) $40°$.

e) $45°$.

47. (ITA/2020)

Seja a um número real satisfazendo $0 < a < \frac{\pi}{2}$. Então, a soma de todos os valores de $x \in [0, 2\pi]$ que satisfazem a equação

$$\cos x \; sen(a + x) = sen\, a$$

é igual a

a) $5\pi + 2a$.

b) $5\pi + a$.

c) 5π.

d) $5\pi - a$.

e) $5\pi - 2a$.

48. (ITA/2020)

Considere o polinômio $p(x) = x^3 - mx^2 + x + 5 + n$, sendo m, n números reais fixados. Sabe-se que toda raiz $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, da equação $p(z) = 0$ satisfaz a igualdade $a = mb^2 + nb - 1$. Então, a soma dos quadrados das raízes de $p(z) = 0$ é igual a

a) 6.

b) 7.

c) 8.

d) 9.

e) 10.

49. (ITA/2020)

A expansão decimal do número $100! = 100 \cdot 99 \cdots 2 \cdot 1$ possui muitos algarismos iguais a zero. Contando da direita para a esquerda, a partir do dígito das unidades, o número de zeros, que esse número possui antes de um dígito não nulo aparecer, é igual a

a) 20.

b) 21.

c) 22.

d) 23.

e) 24.

50. (ITA/2020)

Seja $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ um polinômio com coeficientes reais. Sabendo que:

I. $p(x)$ é divisível por $x^2 - 4$;

II. a soma das raízes de $p(x)$ é igual a 1;

III. o produto das raízes de $p(x)$ é igual a 3;

IV. $p(-1) = -\frac{15}{4}$;

então, $p(1)$ é igual a

a) $-\frac{17}{2}$.

b) $-\frac{19}{4}$.

c) $-\frac{3}{2}$.

d) $\frac{9}{4}$.

e) $\frac{9}{2}$.

51. (ITA/2020)

Os pontos $B = \left(1, 1 + 6\sqrt{2}\right)$ e $C = \left(1 + 6\sqrt{2}, 1\right)$ são vértices do triângulo isósceles ABC de base BC, contido no primeiro quadrante. Se o raio da circunferência inscrita no triângulo mede 3, então as coordenadas do vértice A são

a) $\left(7\sqrt{2}, 7\sqrt{2}\right)$.

b) $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$.

c) $\left(1 + 7\sqrt{2}, 1 + 7\sqrt{2}\right)$.

d) $\left(1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\right)$.

e) $\left(1 + 6\sqrt{2}, 1 + 6\sqrt{2}\right)$.

52. (ITA/2020)

Dado $a \in \mathbb{R}$, defina $p = a + a^2$ e $q = a + a^3$ e considere as seguintes afirmações:

I. se p ou q é irracional, então a é irracional.

II. se p e q são racionais, então a é racional.

III. se q é irracional, então p é irracional.

É(são) VERDADEIRA(S)

a) apenas I.

b) apenas II.

c) apenas I e II.

d) apenas I e III.

e) todas.

53. (ITA/2020)

Considere as seguintes afirmações:

I. Todo poliedro formado por 16 faces quadrangulares possui exatamente 18 vértices e 32 arestas.

II. Em todo poliedro convexo que possui 10 faces e 16 arestas, a soma dos ângulos de todas as faces é igual a 2160°.

III. Existe um poliedro com 15 faces, 22 arestas e 9 vértices.

É(são) VERDADEIRA (S)

a) apenas I.

b) apenas II.

c) apenas III.

d) apenas I e II.

e) apenas II e III.

54. (ITA/2020)

Considere as seguintes afirmações:

I. Sejam π_1, π_2 e π_3 três planos distintos, e secantes dois a dois segundo as retas distintas r, s e t. Se $r \cap s \neq \emptyset$ então $r \cap s \cap t \neq \emptyset$.

II. As projeções ortogonais de duas retas paralelas r e s sobre um plano π são duas retas paralelas,

III. Para quaisquer retas r, s e t reversas duas a duas, existe uma reta u paralela à r e concorrente com s e com t.

É(são) VERDADEIRA(S)

a) apenas I.

b) apenas II.

c) apenas I e II.

d) apenas I e III.

e) nenhuma.

55. (ITA/2020)

Considere o conjunto $M(n, k)$ de todas as matrizes quadradas de ordem $n \times n$, com exatamente k elementos iguais a 1, e os demais iguais a 0 (zero). Escolhendo aleatoriamente matrizes $L \in M(3, 1)$ e $R \in M(4, 2)$, a probabilidade de que $L^2 = 0$ e $R^2 = 0$ é igual a

a) $\frac{1}{3}$.

b) $\frac{1}{5}$.

c) $\frac{4}{15}$.

d) $\frac{13}{30}$.

e) $\frac{29}{30}$.

GABARITO

41. a
42. d
43. a
44. c
45. c
46. b
47. e
48. b
49. e
50. d
51. c
52. c
53. b
54. a
55. b

QUESTÕES DA PROVA RESOLVIDAS E COMENTADAS

41. (ITA/2020)

Sejam $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ números reais tais que $2^{x_1} = 4; 3^{x_2} = 5; 4^{x_3} = 6; 5^{x_4} = 7; 6^{x_5} = 8$ e $7^{x_6} = 9$. Então, o produto $x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ é igual a

a) 6.

b) 8.

c) 10.

d) 12.

e) 14.

Comentários

Os números reais podem ser escritos como:

$$2^{x_1}=4\Rightarrow x_1=\log_2 4$$
$$3^{x_2}=5\Rightarrow x_2=\log_3 5$$
$$4^{x_3}=6\Rightarrow x_3=\log_4 6$$
$$5^{x_4}=7\Rightarrow x_4=\log_5 7$$
$$6^{x_5}=8\Rightarrow x_5=\log_6 8$$
$$7^{x_6}=9\Rightarrow x_6=\log_7 9$$

Assim, fazendo o produto entre eles, obtemos:

$$x_1x_2x_3x_4x_5x_6=\log_2 4\cdot\log_3 5\cdot\log_4 6\cdot\log_5 7\cdot\log_6 8\cdot\log_7 9$$

Podemos usar a seguinte propriedade dos logaritmos para simplificar a expressão:

$$\log_b a\cdot\log_a c=\log_b c$$

Reorganizando os termos da expressão:

$$\log_2 4\cdot\log_4 6\cdot\log_3 5\cdot\log_5 7\cdot\log_7 9\cdot\log_6 8=\log_2 6\cdot\log_6 8\cdot\log_3 7\cdot\log_7 9$$
$$=\log_2 8\cdot\log_3 9=\log_2 2^3\cdot\log_3 3^2=3\cdot 2=6$$
$$\therefore x_1x_2x_3x_4x_5x_6=6$$

Gabarito: “a”.

---

42. (ITA/2020)

Sejam a,b e c números reais, $a\neq 0$, tais que $a^2+b^2=c^2$. Se a,b e c formam, nessa ordem, uma progressão geométrica de razão k, então o produto P e a soma S de todos os possíveis valores para k são iguais a

a) $P=1$ e $S=0$.

b) $P=-1$ e $S=1$.

c) $P=-1$ e $S=-1$.

d) $P=\frac{-(1+\sqrt{5})}{2}$ e $S=0$.

e) $P=\frac{(1+\sqrt{5})^2}{4}$ e $S=0$.

Comentários

Vamos reescrever a sequência (a,b,c) como $\left(\frac{b}{k},\mathrm{b},bk\right)$ para simplificar as contas.

Assim, a partir do enunciado, podemos escrever:

$$\left(\frac{b}{k}\right)^2+b^2=(bk)^2$$

Como $a\neq 0$, implica que $b\neq 0$

Dessa forma, temos:

$$\left(\frac{1}{k}\right)^2+1=k^2$$

$$k^4 - k^2 - 1 = 0$$

Façamos $y = k^2$

$$y^2 - y - 1 = 0$$

$$y = k^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ ou } y = k^2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Como k é um número real, temos que $k^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow k = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

Assim, $P = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $S = 0$.

Gabarito: "d".

---

43. (ITA/2020)

A parte real da soma infinita da progressão geométrica cujo termo geral a_n é dado por

$$a_n = \frac{\cos n + i \cdot sen\, n}{2^n}, n = 1, 2, 3, \ldots$$

é igual a

a) $\frac{-1+2\cos 1}{5-4\cos 1}$

b) $\frac{-2+4\cos 1}{5-4\cos 1}$

c) $\frac{4-2\cos 1}{5-4\cos 1}$

d) $\frac{1+2\cos 1}{5-4\cos 1}$

e) $\frac{2+4\cos 1}{5-4\cos 1}$

Comentários

Note que podemos escrever o termo geral da seguinte forma:

$$a_n = \frac{cis\ n}{2^n} = \frac{(cis\ 1)^n}{2^n} \Rightarrow a_n = \left(\frac{cis\ 1}{2}\right)^n$$

Usando o termo geral, temos a seguinte sequência:

$$\left(\frac{cis\ 1}{2}, \left(\frac{cis\ 1}{2}\right)^2, \left(\frac{cis\ 1}{2}\right)^3, \ldots, \left(\frac{cis\ 1}{2}\right)^n, \ldots\right)$$

Logo, a razão da PG é:

$$q = \frac{cis\ 1}{2}$$

Como $|q| = \frac{1}{2} < 1$, temos que a soma infinita converge. Assim, usando a fórmula da soma infinita da PG, obtemos:

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{cis\,1}{2}}{1 - \frac{cis\,1}{2}} = \frac{\frac{cis\,1}{2}}{\frac{2 - cis\,1}{2}} = \frac{cis\,1}{2 - cis\,1}$$

$$\Rightarrow S = \frac{\cos 1 + i\,sen\,1}{2 - \cos 1 - isen\,1}$$

Multiplicando o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador, temos:

$$S = \frac{(\cos 1 + i\,sen\,1)}{(2 - \cos 1 - isen\,1)} \cdot \frac{(2 - \cos 1 + isen\,1)}{(2 - \cos 1 + isen\,1)}$$

$$S = \frac{\cos 1\,(2 - \cos 1) + isen\,1 \cos 1 + i\,sen\,1(2 - \cos 1) - sen^2 1}{(2 - \cos 1)^2 + sen^2 1}$$

$$S = \frac{\cos 1\,(2 - \cos 1) - sen^2 1 + i[sen\,1 \cos 1 + isen\,1(2 - \cos 1)]}{(2 - \cos 1)^2 + sen^2 1}$$

A parte real da soma infinita é dada por:

$$S = \frac{\cos 1\,(2 - \cos 1) - sen^2 1}{(2 - \cos 1)^2 + sen^2 1}$$

Simplificando a expressão:

$$S = \frac{2\cos 1 - \cos^2 1 - sen^2 1}{4 - 4\cos 1 + \cos^2 1 + sen^2 1} = \frac{2\cos 1 - 1}{4 - 4\cos 1 + 1}$$

$$\therefore S = \frac{-1 + 2\cos 1}{5 - 4\cos 1}$$

Gabarito: "a"

---

44. (ITA/2020)

Duas curvas planas c_1 e c_2 são definidas pelas equações

$$c_1: 16x^2 + 9y^2 - 224x - 72y + 640 = 0,$$

$$c_2: x^2 + y^2 + 4x - 10y + 13 = 0.$$

Sejam P e Q os pontos de interseção de c_1 com o eixo x e R e S os pontos de interseção de c_2 com o eixo y. A área do quadrilátero convexo de vértices P, Q, R e S é igual a

a) $15 + 7\sqrt{3}$.

b) $15 - 7\sqrt{3}$.

c) $15 + 14\sqrt{3}$.

d) $15 - 14\sqrt{3}$.

e) $25 + 10\sqrt{3}$.

Comentários

Inicialmente, devemos encontrar as coordenadas dos pontos P, Q, R, S. Como P e Q são os pontos de interseção de c_1 com o eixo x, temos:

$$P = (x_p, 0) \text{ e } Q = (x_q, 0)$$

Fazendo $y = 0$ na equação de c_1:

$$16x^2 - 224x + 640 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 14x + 40 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 10)(x - 4) = 0$$

Portanto, as raízes são $x = 10$ ou $x = 4$.

Assim, temos os pontos $P(4, 0)$ e $Q(10, 0)$.

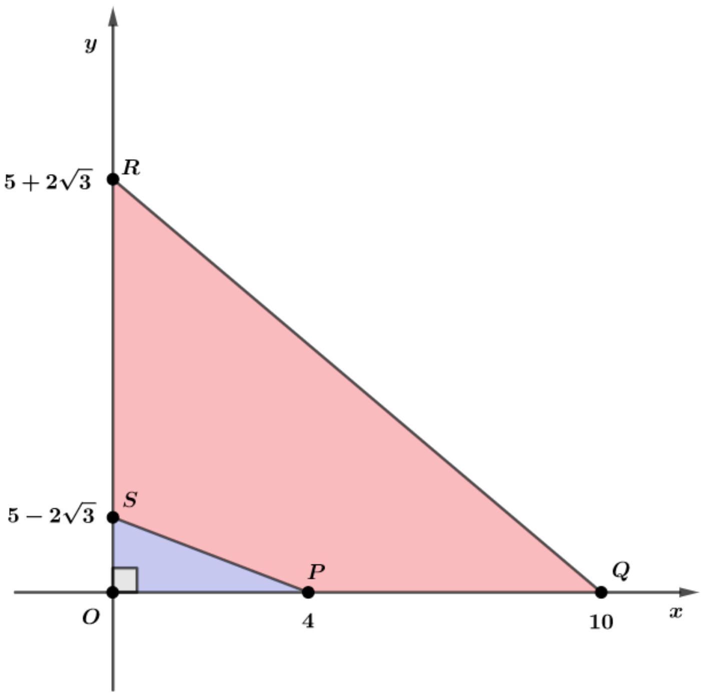
Resta encontrar R e S. Como esses pontos são a interseção de c_2 com o eixo y, temos $R = (0, y_R)$ e $S = (0, y_S)$. Fazendo $x = 0$ em c_2:

$$y^2 - 10y + 13 = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{10 \pm \sqrt{48}}{2} = \frac{10 \pm 4\sqrt{3}}{2} = 5 \pm 2\sqrt{3}$$

Assim, temos $R = (0, 5 + 2\sqrt{3})$ e $S = (0, 5 - 2\sqrt{3})$.

Esboçando os pontos no plano cartesiano, temos a seguinte figura:



A área pedida é dada por:

$$[PQRS] = [QRO] - [PSO] = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (5 + 2\sqrt{3}) - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (5 - 2\sqrt{3})$$

$$[PQRS] = 25 + 10\sqrt{3} - 10 + 4\sqrt{3} = 15 + 14\sqrt{3}$$

Gabarito: “c”.

---

45. (ITA/2020)

A cada aniversário, seu bolo tem uma quantidade de velas igual à sua idade. As velas são vendidas em pacotes com 12 unidades e todo ano é comprado apenas um novo pacote. As velas remanescentes são guardadas para os anos seguintes, desde o seu primeiro aniversário. Qual a sua idade, em anos, no primeiro ano em que as velas serão insuficientes?

a) 12.

b) 23.

c) 24.

d) 36.

e) 38.

Comentários

Veja que a quantidade de velas gastas a cada aniversário pode ser vista como uma progressão aritmética de razão 1.

Aniversário	Velas gastas
1º	1
2º	2
3º	3
$\vdots$	$\vdots$
nº	n

Assim, o total de velas gastas até o n-ésimo aniversário é:

$$V_T = \frac{(1+n)n}{2}$$

Como todo ano um novo pacote de 12 velas é compradas, temos até o n-ésimo aniversário:

$$12n - \frac{(1+n)n}{2} \text{ velas remanescentes}$$

O primeiro ano em que as velas serão insuficientes ocorrerá quando as velas remanescentes satisfazerem a condição:

$$12n - \frac{(1+n)n}{2} < 0 \Rightarrow 12n < \frac{(1+n)n}{2}$$

Sendo n a idade, temos que $n \neq 0$, logo:

$$12 < \frac{1+n}{2} \Rightarrow 24 < 1+n \Rightarrow 23 < n \therefore n > 23$$

O menor inteiro que satisfaz essa condição é $n = 24$.

Gabarito: "c".

46. (ITA/2020)

Seja A um ponto externo a circunferência λ de centro O e raio r. Considere uma reta passando por A e secante a λ nos pontos C e D tal que o segmento AC é externo a λ e tem comprimento igual a r. Seja B o ponto de λ tal que O pertence ao segmento AB. Se o ângulo $B\hat{A}D$ mede $10°$, então a medida do ângulo $B\hat{O}D$ é igual a

a) $25°$.

b) $30°$.

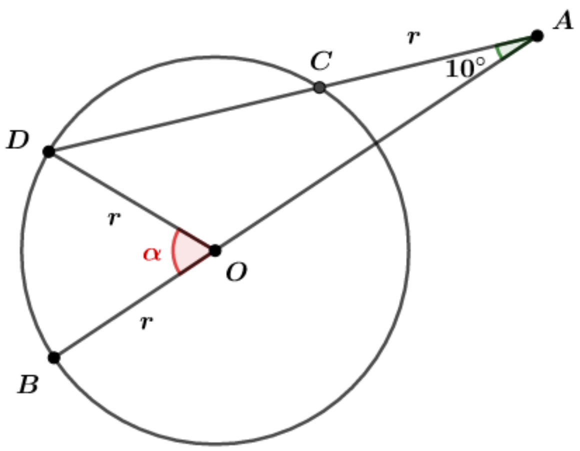
c) $35°$.

d) $40°$.

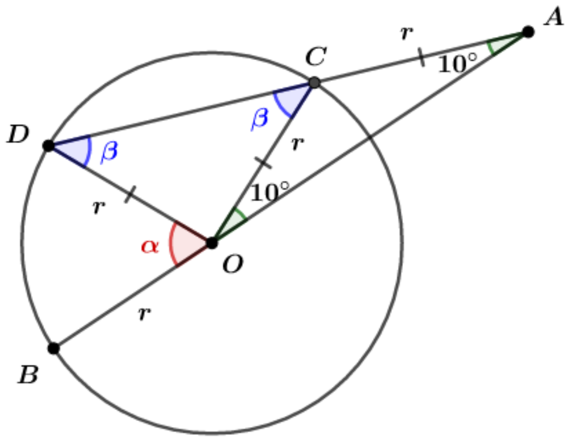
e) $45°$.

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:

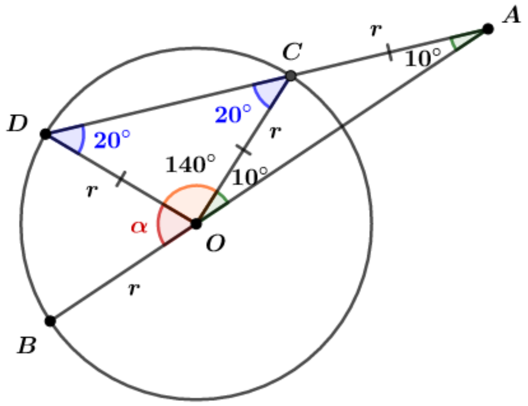


Queremos determinar α. Perceba que OCA é um triângulo isósceles, pois $CO = CA = r$. Logo:



Como β é ângulo externo ao ΔOCA, então $\beta = 10° + 10° = 20°$. Sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo deve ser $180°$, temos:

$$C\hat{O}D + \beta + \beta = 180° \Rightarrow C\hat{O}D = 180° - 40° = 140°$$



Assim, α é dada por:

$$\alpha + 140° + 10° = 180° \therefore \alpha = 30°$$

Gabarito: "b".

---

47. (ITA/2020)

Seja a um número real satisfazendo $0 < a < \frac{\pi}{2}$. Então, a soma de todos os valores de $x \in [0, 2\pi]$ que satisfazem a equação

$$\cos x \ \ sen(a + x) = sen\ a$$

é igual a

a) $5\pi + 2a$.

b) $5\pi + a$.

c) 5π.

d) $5\pi - a$.

e) $5\pi - 2a$.

Comentários

Reescrevendo a equação, obtemos:

$$\cos x \ \ sen(a + x) = sen\ a$$

$$\cos x\,(sena \cos x + senx \cos a) = sen\ a$$

$$sena \cos^2 x + senx \cos x \cos a = sen\ a$$

Note que

$$sen\ 2x = 2senx \cos x \Rightarrow senx \cos x = \frac{sen\ 2x}{2}$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Substituindo na equação:

$$sena\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right) + \left(\frac{sen\ 2x}{2}\right)\cos a = sen\ a$$

$$\frac{sen\ a}{2}+\frac{sen\ a\cos 2x}{2}+\frac{sen\ 2x\cos a}{2}=sen\ a$$
$$\frac{sen\ a\cos 2x+sen\ 2x\cos a}{2}=\frac{sen\ a}{2}$$
$$sen(a+2x)=sen\ a$$

Assim, temos as seguintes soluções:

$$a+2x=a+2k\pi\Rightarrow x=k\pi,k\in\mathbb{Z}$$

Ou

$$a+2x=\pi-a+2k\pi\Rightarrow 2x=\pi-2a+2k\pi\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}-a+k\pi,k\in\mathbb{Z}$$

Para o intervalo $x\in[0,2\pi]$ e lembrando que $a<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{\pi}{2}-a>0$, as soluções são:

$$x=k\pi\Rightarrow x\in\{0,\pi,2\pi\}$$
$$x=\frac{\pi}{2}-a+k\pi\Rightarrow x\in\left\{\frac{\pi}{2}-a,\frac{3\pi}{2}-a\right\}$$

Somando-se as soluções:

$$S=0+\pi+2\pi+\frac{\pi}{2}-a+\frac{3\pi}{2}-a=5\pi-2a$$

Gabarito: “e”.

---

48. (ITA/2020)

Considere o polinômio $p(x)=x^3-mx^2+x+5+n$, sendo m,n números reais fixados. Sabe-se que toda raiz $z=a+bi$, com $a,b\in\mathbb{R}$, da equação $p(z)=0$ satisfaz a igualdade $a=mb^2+nb-1$. Então, a soma dos quadrados das raízes de $p(z)=0$ é igual a

a) 6.

b) 7.

c) 8.

d) 9.

e) 10.

Comentários

Pelo teorema fundamental da álgebra, o polinômio possui 3 raízes. Além disso, como os coeficientes do polinômio são reais, se tivermos uma raiz complexa, pelo teorema da raiz complexa conjugada, podemos afirmar que o conjugado dessa raiz também é raiz. Assim, temos as seguintes possibilidades:

I) duas raízes complexas e uma real

II) três raízes reais

Para o caso II de apenas raízes reais, temos da condição do enunciado, que toda raiz $z = a + bi$ satisfaz a igualdade $a = mb^2 + nb - 1$, ou seja, as raízes reais implicam $b = 0$. Logo, todas as raízes são:

$$z = a = m(0)^2 + n(0) - 1 \Rightarrow z_1 = z_2 = z_3 = -1$$

Aplicando a relação de Girard para a soma do produto dois a dois:

$$z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = 1$$

Mas, como $z_1 = z_2 = z_3 = -1$:

$$z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = (-1)(-1) + (-1)(-1) + (-1)(-1) = 3$$

Portanto, chegamos a um absurdo!

A única possibilidade é a I, duas raízes complexas conjugadas e uma real. Então, sejam as raízes, para $p, q, r \in \mathbb{R}$:

$$z_1 = p + qi$$

$$z_2 = p - qi$$

$$z_3 = r$$

Da condição do enunciado:

$$a = mb^2 + nb - 1$$

$$z_1 \Rightarrow p = mq^2 + nq - 1 \ \ (eq. I)$$

$$z_2 \Rightarrow p = mq^2 - nq - 1 \ \ (eq. II)$$

Da $eq. I$ e $eq. II$, temos $nq = 0$, logo:

$$p = mq^2 - 1$$

$$nq = 0$$

Se $q = 0$, teremos raízes reais, portanto, $n = 0$.

Como $z_3 = r$, temos $r = -1 \therefore z_3 = -1$.

O polinômio é:

$$p(x) = x^3 - mx^2 + x + 5$$

Aplicando Girard:

$$z_1 + z_2 + z_3 = m \Rightarrow p + qi + p - qi - 1 = m \Rightarrow \boxed{2p = m + 1 \ (eq. III)}$$

$$z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = 1 \Rightarrow (p + qi)(p - qi) + (-1)(p + qi + p - qi) = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{p^2 + q^2 = 1 + 2p \ (eq. IV)}$$

$$z_1z_2z_3 = -5 \Rightarrow (p + qi)(p - qi)(-1) = -5 \Rightarrow \boxed{p^2 + q^2 = 5 \ (eq. V)}$$

Usando a $eq. V$ na $eq. IV$:

$$5 = 1 + 2p \Rightarrow 2p = 4 \therefore p = 2$$

Substituindo $p = 2$ na $eq. IV$:

$$4 + q^2 = 1 + 4 \Rightarrow q = \pm 1$$

Assim, a soma dos quadrados das raízes é:

$$S = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = (p + qi)^2 + (p - qi)^2 + (-1)^2$$

$$S = p^2 + 2pqi - q^2 + p^2 - 2pqi - q^2 + 1 = 2p^2 - 2q^2 + 1 = 2(2)^2 - 2(-1)^2 + 1$$

$$S = 7$$

Gabarito: "b".

---

49. (ITA/2020)

A expansão decimal do número $100! = 100 \cdot 99 \cdots 2 \cdot 1$ possui muitos algarismos iguais a zero. Contando da direita para a esquerda, a partir do dígito das unidades, o número de zeros, que esse número possui antes de um dígito não nulo aparecer, é igual a

a) 20.

b) 21.

c) 22.

d) 23.

e) 24.

Comentários

Seja a fatoração em primos, única pelo teorema fundamental da álgebra, de $100!$:

$$100! = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot \ldots \cdot 97^z$$

Mas $100! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100$.

Dado um número inteiro positivo N, a quantidade de zeros em seu final é igual ao número de vezes em que se pode dividir por 10 e continuar com um inteiro positivo. A cada divisão, diminui-se uma unidade dos expoentes de 2 e de 5. Logo, é possível dividir por 10 $\min\{a, c\}$ vezes.

Acontece que em m!, para todo inteiro positivo m, temos sempre que o expoente de 5 é menor ou igual ao expoente de 2, isto é, $c \leq a$. Logo, $\min\{a, c\} = c$. O problema agora é descobrir o expoente de 5 em 100!

Contemos as contribuições de cada $k \in \{1,2, \ldots, 99, 100\}$.

Cada múltiplo de 5 contribui com pelo menos um fator 5.

Cada múltiplo de $5^2 = 25$ contribui com um fator 5 extra.

Não existem múltiplos de 5^l com $l \geq 3$.

Temos $\left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{25} \right\rfloor = 20 + 4 = 24$ zeros no fim de $100!$.

Gabarito: "e".

---

50. (ITA/2020)

Seja $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ um polinômio com coeficientes reais. Sabendo que:

I. $p(x)$ é divisível por $x^2 - 4$;

II. a soma das raízes de $p(x)$ é igual a 1;

III. o produto das raízes de $p(x)$ é igual a 3;

IV. $p(-1) = -\frac{15}{4}$;

então, $p(1)$ é igual a

a) $-\frac{17}{2}$.

b) $-\frac{19}{4}$.

c) $-\frac{3}{2}$.

d) $\frac{9}{4}$.

e) $\frac{9}{2}$.

Comentários

De cada afirmação, temos:

I) Como $p(x)$ é divisível por $x^2 - 4$, temos:

$$p(x) = q(x)(x^2 - 4)$$

As raízes do polinômio $x^2 - 4$ são $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$, desse modo:

$$p(2) = 16a + 8b + 4c + 2d + e = 0$$

$$p(-2) = 16a - 8b + 4c - 2d + e = 0$$

II) Por Girard:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a} = 1 \Rightarrow b = -a$$

III) Por Girard:

$$x_1x_2x_3x_4 = \frac{e}{a} = 3 \Rightarrow e = 3a$$

IV) Substituindo $x = -1$ no polinômio:

$$p(-1) = a - b + c - d + e = -\frac{15}{4}$$

Para $b = -a$ e $e = 3$, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 16a + 8b + 4c + 2d + e = 0 \\ 16a - 8b + 4c - 2d + e = 0 \\ a - b + c - d + e = -\frac{15}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16a - 8a + 4c + 2d + 3a = 0 \\ 16a + 8a + 4c - 2d + 3a = 0 \\ a + a + c - d + 3a = -\frac{15}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 11a + 4c + 2d = 0 \\ 27a + 4c - 2d = 0 \\ 5a + c - d = -\frac{15}{4} \end{cases}$$

Multiplicando a última equação por 2:

$$\begin{cases} 11a + 4c + 2d = 0 \\ 27a + 4c - 2d = 0 \\ 10a + 2c - 2d = -\dfrac{15}{2} \end{cases}$$

Somando a primeira equação com a segunda e a primeira com a terceira:

$$\begin{cases} 38a + 8c = 0 \\ 21a + 6c = -\dfrac{15}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 19a + 4c = 0 \\ 7a + 2c = -\dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 19a + 4c = 0 \\ -14a - 4c = 5 \end{cases} \Rightarrow 5a = a \therefore a = 1$$

$$\therefore b = -1 \text{ e } e = 3$$

$$19a + 4c = 0 \Rightarrow 19 + 4c = 0 \therefore c = -\frac{19}{4}$$

$$11a + 4c + 2d = 0 \Rightarrow 11 + 4\left(-\frac{19}{4}\right) + 2d = 0 \Rightarrow -8 + 2d = 0 \therefore d = 4$$

Queremos $p(1)$, logo:

$$p(1) = a + b + c + d + e = 1 - 1 - \frac{19}{4} + 4 + 3 = -\frac{19}{4} + 7 = \frac{-19 + 28}{4} = \frac{9}{4}$$

Gabarito: "d".

---

51. (ITA/2020)

Os pontos $B = \left(1, 1 + 6\sqrt{2}\right)$ e $C = \left(1 + 6\sqrt{2}, 1\right)$ são vértices do triângulo isósceles ABC de base BC, contido no primeiro quadrante. Se o raio da circunferência inscrita no triângulo mede 3, então as coordenadas do vértice A são

a) $\left(7\sqrt{2}, 7\sqrt{2}\right)$.

b) $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$.

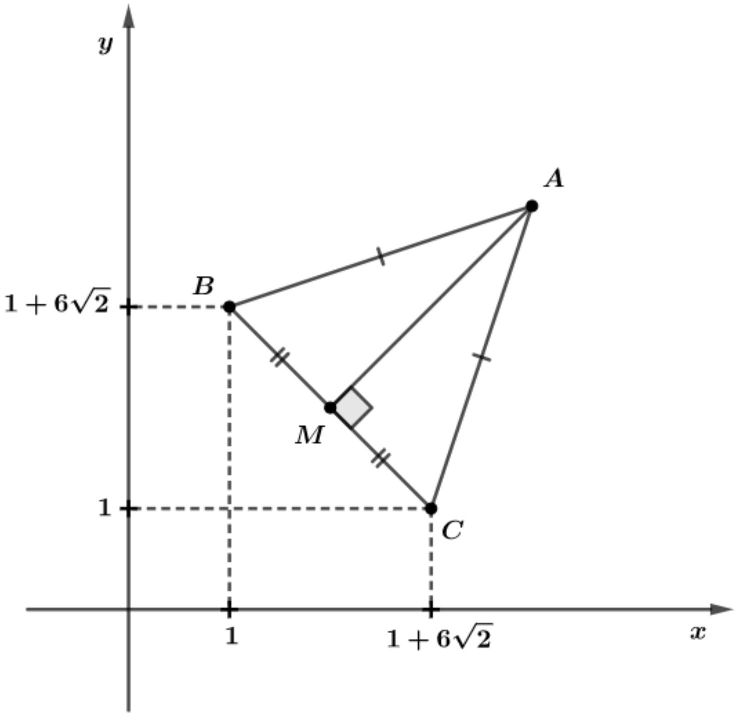
c) $\left(1 + 7\sqrt{2}, 1 + 7\sqrt{2}\right)$.

d) $\left(1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\right)$.

e) $\left(1 + 6\sqrt{2}, 1 + 6\sqrt{2}\right)$.

Comentários

Como ABC é um triângulo isósceles, então sua altura em relação ao vértice A também é mediatriz em relação à base BC. Temos a seguinte figura:



M é ponto médio de BC, logo:

$$M = \frac{B+C}{2} \Rightarrow M = \left(\frac{1+1+6\sqrt{2}}{2}; \frac{1+1+6\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow M = \left(1+3\sqrt{2}; 1+3\sqrt{2}\right)$$

Como $\overline{AM}$ é mediatriz, temos que ela é perpendicular à reta $\overline{BC}$, vamos encontrar seu coeficiente angular:

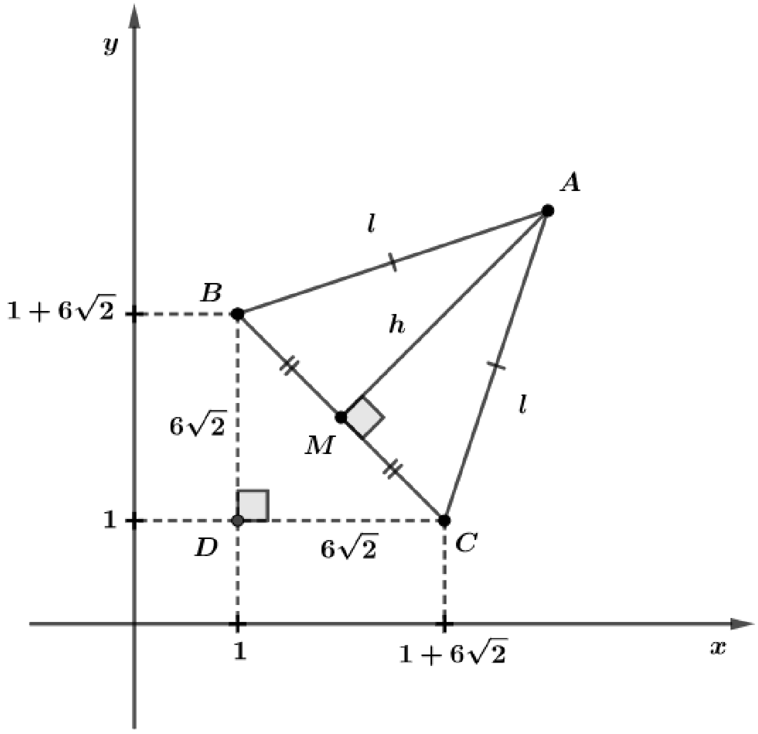
$$m_{BC} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{1+6\sqrt{2}-1}{1-\left(1+6\sqrt{2}\right)} = \frac{6\sqrt{2}}{-6\sqrt{2}} = -1$$

$$m_{BC} \cdot m_{AC} = -1 \Rightarrow (-1) \cdot m_{AC} = -1 \therefore m_{AC} = 1$$

Como $x_M = y_M$ e $m_{AC} = 1$, temos que a reta que passa por M e A é $y = x$, ou seja, as coordenadas de A são da forma:

$$A = (a, a)$$

Vamos resolver o problema por geometria plana. Sabemos que $r = 3$ é o raio da circunferência inscrita ao triângulo. Consideremos a seguinte figura:



Do triângulo retângulo BCD:

$$BC^2 = \left(6\sqrt{2}\right)^2 + \left(6\sqrt{2}\right)^2 = 72 + 72 = 144 \therefore BC = 12$$

Podemos calcular a área do ΔABC de duas formas:

$$[ABC] = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h = p \cdot r \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot h = \frac{(l + l + 12)}{2} \cdot 3 \Rightarrow 4h = 2l + 12 \Rightarrow \boxed{2h = l + 6}$$

Veja que pelo teorema de Pitágoras no ΔABM:

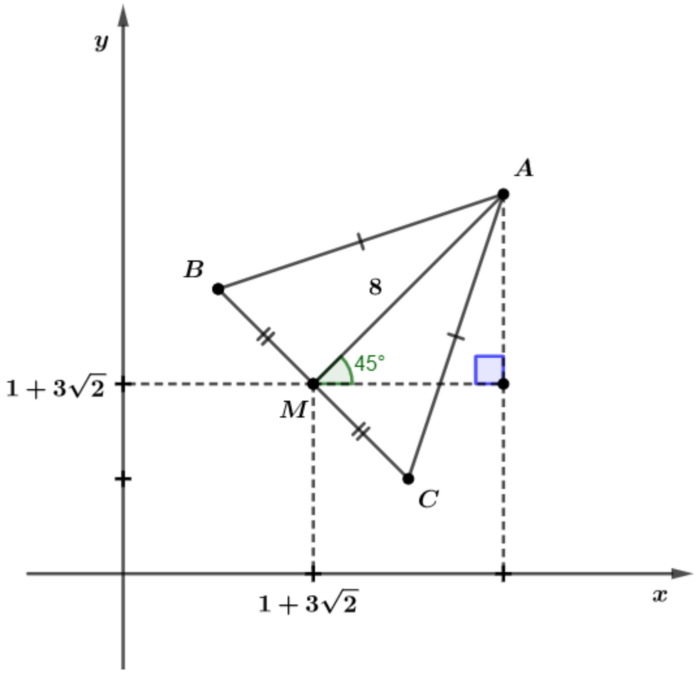
$$l^2 = h^2 + 6^2$$

Usando $2h = l + 6 \Rightarrow l = 2h - 6$:

$$(2h - 6)^2 = h^2 + 6^2 \Rightarrow 4h^2 - 24h + 36 = h^2 + 36 \Rightarrow 3h^2 - 24h = 0$$

$$3h(h - 8) = 0 \therefore h = 8$$

Podemos usar a seguinte figura para calcular as coordenadas de A:



$$a = 1 + 3\sqrt{2} + 8sen\,45° = 1 + 3\sqrt{2} + \frac{8\sqrt{2}}{2} = 1 + 7\sqrt{2}$$

$$\therefore A = \left(1 + 7\sqrt{2}; 1 + 7\sqrt{2}\right)$$

Gabarito: "c".

---

52. (ITA/2020)

Dado $a \in \mathbb{R}$, defina $p = a + a^2$ e $q = a + a^3$ e considere as seguintes afirmações:

I. se p ou q é irracional, então a é irracional.

II. se p e q são racionais, então a é racional.

III. se q é irracional, então p é irracional.

É(são) VERDADEIRA(S)

a) apenas I.

b) apenas II.

c) apenas I e II.

d) apenas I e III.

e) todas.

Comentários

I. Temos da afirmação $(p \in \mathbb{I}) \vee (q \in \mathbb{I}) \rightarrow a \in \mathbb{I}$. Usando sua contrapositiva:

$$\sim(a \in \mathbb{I}) \rightarrow \sim[(p \in \mathbb{I}) \vee (q \in \mathbb{I})]$$

$$\sim(a \in \mathbb{I}) \rightarrow \sim(p \in \mathbb{I}) \wedge \sim(q \in \mathbb{I})$$

$$a \in \mathbb{Q} \rightarrow (p \in \mathbb{Q}) \wedge (q \in \mathbb{Q})$$

Assim, temos que verificar se $a \in \mathbb{Q}$ implica que $p \in \mathbb{Q}$ e $q \in \mathbb{Q}$. Como $a \in \mathbb{Q}$, temos $a^2 \in \mathbb{Q}$ e $a^3 \in \mathbb{Q}$, logo, $p = a + a^2 \in \mathbb{Q}$ e $q = a + a^3 \in \mathbb{Q}$. Portanto, afirmação verdadeira.

II. Multiplicando-se p por a, temos:

$$ap = a^2 + a^3$$

Podemos escrever a^2 e a^3 como:

$$p = a + a^2 \Rightarrow a^2 = p - a$$

$$q = a + a^3 \Rightarrow a^3 = q - a$$

Substituindo em ap:

$$ap = p - a + q - a \Rightarrow ap + 2a = p + q \Rightarrow (p+2)a = p + q$$

Para $p \neq -2$:

$$a = \frac{p+q}{p+2}$$

Se $p, q \in \mathbb{Q}$, temos que $\frac{p+q}{p+2} \in \mathbb{Q}$, logo, $a \in \mathbb{Q}$.

Para $p = -2$:

$$-2 = a + a^2 \Rightarrow a^2 + a + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 - 8 = -7 < 0$$

Portanto, $a \notin \mathbb{R}$, logo, não é possível.

Concluímos que a afirmação é verdadeira.

III. Tomemos o seguinte contraexemplo:

$$a = \sqrt{3} - \frac{1}{2}$$

$$q = a(1 + a^2) = \left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)^2\right)$$

$$q = \left(\frac{2\sqrt{3} - 1}{2}\right)\left(1 + 3 + \frac{1}{4} - \sqrt{3}\right) = \frac{(2\sqrt{3} - 1)(17 - 4\sqrt{3})}{8} = \frac{34\sqrt{3} - 17 - 24 + 4\sqrt{3}}{8}$$

$$q = \frac{38\sqrt{3} - 41}{8} \in \mathbb{I}$$

$$p = a(1 + a) = \left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \sqrt{3} - \frac{1}{2}\right) = \left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)\left(\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right) = 3 - \frac{1}{4} = \frac{11}{4} \in \mathbb{Q}$$

Portanto, afirmação falsa.

Gabarito: "c".

---

53. (ITA/2020)

Considere as seguintes afirmações:

I. Todo poliedro formado por 16 faces quadrangulares possui exatamente 18 vértices e 32 arestas.

II. Em todo poliedro convexo que possui 10 faces e 16 arestas, a soma dos ângulos de todas as faces é igual a 2160°.

III. Existe um poliedro com 15 faces, 22 arestas e 9 vértices.

É(são) VERDADEIRA (S)

a) apenas I.

b) apenas II.

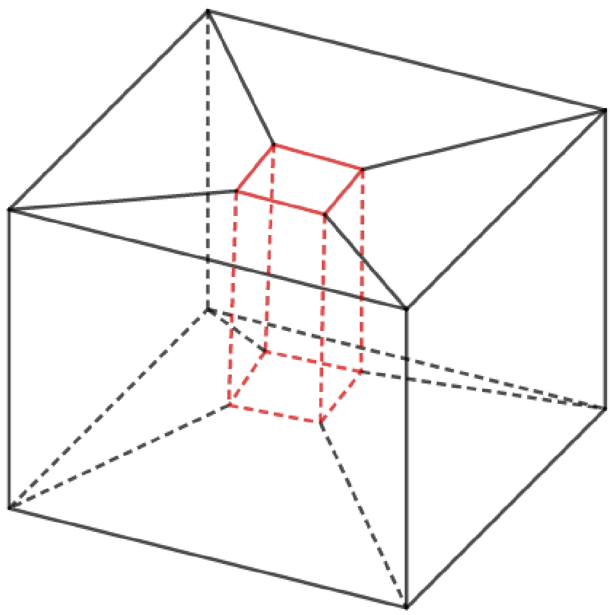
c) apenas III.

d) apenas I e II.

e) apenas II e III.

Comentários

I. Cuidado quando a afirmação diz "todo poliedro", pois podemos ter um poliedro côncavo que não possui esse número de vértices e arestas. Veja o contraexemplo:



Esse poliedro possui 16 faces quadrangulares, 32 arestas e 16 vértices. Portanto, afirmação falsa.

II. A afirmação diz que o poliedro convexo possui 10 faces e 16 arestas, logo $F = 10$ e $A = 16$. Pela relação de Euler, temos:

$$V - A + F = 2$$

$$V - 16 + 10 = 2 \therefore V = 8$$

A soma dos ângulos internos de um poliedro convexo é dada por:

$$S_i = 360° \cdot (V - 2)$$

$$S_i = 360° \cdot (8-2) = 360° \cdot 6 = 2160°$$

Portanto, afirmação verdadeira.

III. Se existe um poliedro com tais características, devemos ter:

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \cdots$$

Note que

$$3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \cdots \geq 3F_3 + 3F_4 + 3F_5 + \cdots = 3(F_3 + F_4 + F_5 + \cdots) = 3F$$

$$\Rightarrow 2A \geq 3F$$

Substituindo $A = 22$ e $F = 15$, temos:

$$2 \cdot 22 \geq 3 \cdot 15 \Rightarrow 44 \geq 45\ (Absurdo!)$$

Portanto, afirmação falsa.

Gabarito: "b".

---

54. (ITA/2020)

Considere as seguintes afirmações:

I. Sejam π_1, π_2 e π_3 três planos distintos, e secantes dois a dois segundo as retas distintas r, s e t. Se $r \cap s \neq \emptyset$ então $r \cap s \cap t \neq \emptyset$.

II. As projeções ortogonais de duas retas paralelas r e s sobre um plano π são duas retas paralelas.

III. Para quaisquer retas r, s e t reversas duas a duas, existe uma reta u paralela à r e concorrente com s e com t.

É(são) VERDADEIRA(S)

a) apenas I.

b) apenas II.

c) apenas I e II.

d) apenas I e III.

e) nenhuma.

Comentários

I. Como r, s, t são as retas da interseção dos três planos distintos e secantes dois a dois, temos:

$$r \in \pi_1 \cap \pi_2$$

$$s \in \pi_1 \cap \pi_3$$

$$t \in \pi_2 \cap \pi_3$$

Se $r \cap s \neq \emptyset$ e sabendo que as retas são distintas (não podem ser coincidentes), temos:

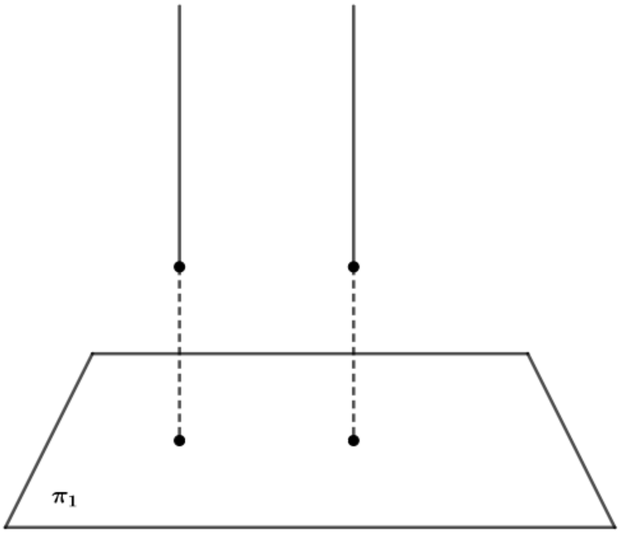
$$r \cap s = \{P\}$$

Logo:

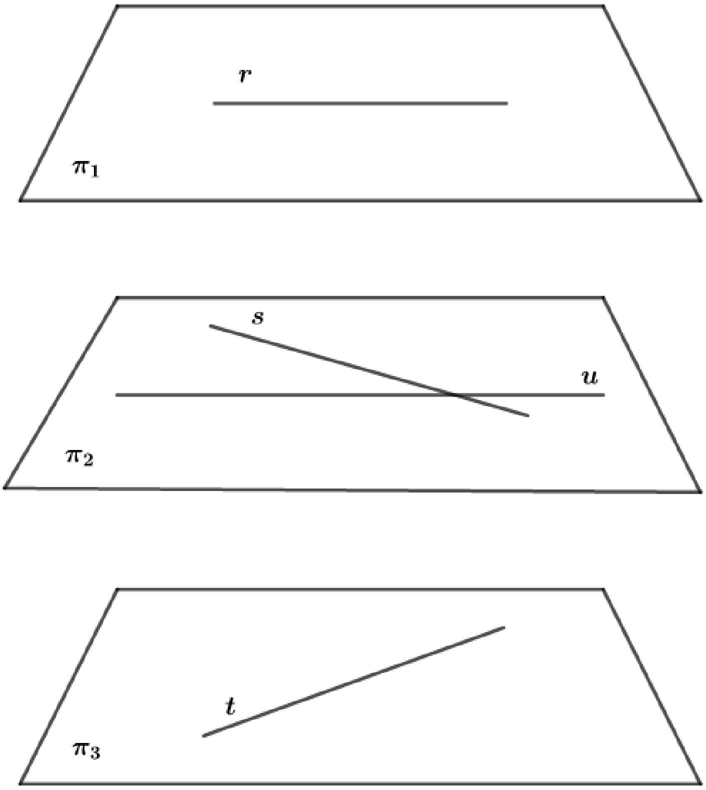
$$P \in r \Rightarrow P \in \pi_1 \ e \ P \in \pi_2$$
$$P \in s \Rightarrow P \in \pi_1 \ e \ P \in \pi_3$$
$$P \in \pi_2 \ e \ P \in \pi_3 \Rightarrow P \in t$$

Portanto, $r \cap s \cap t = \{P\} \neq \emptyset$. Verdadeira.

II. Podemos ter duas retas paralelas e perpendiculares a um mesmo plano, a projeção delas no plano será dois pontos. Portanto, falsa.



III. Vejamos o contra-exemplo:



Note que tomando-se os planos $\pi_1//\pi_2//\pi_3$ e as retas $r \in \pi_1, s \in \pi_2$ e $t \in \pi_3$, não paralelas entre elas, temos que a reta u paralela à r não pode ser concorrente simultaneamente à s e à t. Portanto, falsa.

Gabarito: "a".

---

55. (ITA/2020)

Considere o conjunto $M(n, k)$ de todas as matrizes quadradas de ordem $n \times n$, com exatamente k elementos iguais a 1, e os demais iguais a 0 (zero). Escolhendo aleatoriamente matrizes $L \in M(3, 1)$ e $R \in M(4, 2)$, a probabilidade de que $L^2 = 0$ e $R^2 = 0$ é igual a

a) $\frac{1}{3}$.

b) $\frac{1}{5}$.

c) $\frac{4}{15}$.

d) $\frac{13}{30}$.

e) $\frac{29}{30}$.

Comentários

I) Analisemos as matrizes $L \in M(3, 1)$. Como $n = 3$ e $k = 1$, temos uma matriz de ordem $3x3$ e um único elemento igual a 1. Temos, por exemplo:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow L^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow L^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Note que nesse caso, se o elemento 1 estiver na diagonal principal, $L^2 \neq 0$. Portanto, das 9 posições possíveis, podemos escolher apenas 6 (excluindo-se a diagonal principal) para inserir o elemento 1. Assim, temos:

$$P(L^2 = 0) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

II) $R \in M(4, 2)$, temos matrizes de ordem $4x4$ e 2 elementos 1. Como analisamos no item I, se tivermos um elemento na diagonal principal, a matriz $R^2 \neq 0$. Então, para o primeiro elemento 1, temos que ele pode escolher 12 das 16 posições possíveis (excluindo-se a diagonal principal), logo, essa probabilidade é

$$\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

Para o segundo elemento 1, devemos analisar do seguinte modo. Seja R definido por (r_{ij}), assim, temos que os elementos de R^2 serão:

$$(R^2)_{ij} = \sum_{k=1}^{4} \underbrace{r_{ik}}_{varia\ coluna} \cdot \underbrace{r_{kj}}_{varia\ linha}$$

Então, para obtermos uma matriz nula desse produto, temos que o segundo 1 não pode ocupar a diagonal principal (4 casos) e também não pode ocupar as posições que fazem com que $r_{ik} \cdot r_{kj} = 1$, isso ocorre quando a linha do segundo elemento 1 é a coluna do primeiro (3 casos excluindo-se a diagonal principal) e quando a coluna do segundo elemento 1 é a linha do primeiro elemento (2 casos), logo, das 15 posições possíveis para o segundo elemento, temos:

$$P(R^2 = 0) = \frac{3}{4} \cdot \frac{15 - 4 - 3 - 2}{15} = \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{15} = \frac{3}{10}$$

Portanto, a probabilidade pedida é:

$$P(L^2 = 0) \cdot P(R^2 = 0) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{5}$$

Gabarito: “b”.