Correção 2ª fase Unesp 2020

Matemática

Professor Marçal

22) Um grupo de cientistas estuda os hábitos de uma espécie animal em uma área de preservação. Inicialmente, delimitou-se uma área plana (ABCD, figura 1), na qual deverão ser estabelecidos dois pontos de observação. Afigura 2 apresenta um modelo matemático da área delimitada, com dois setores retangulares nos quais serão estabelecidos os pontos de observação, sendo que cada ponto de observação deverá pertencer a apenas um dos setores. Parte do grupo de cientistas ocupar-se-á exclusivamente com os hábitos de reprodução dessa espécie e atuará na região em forma de paralelogramo, indicada na figura 3.

FIGURA 1

FIGURA 2

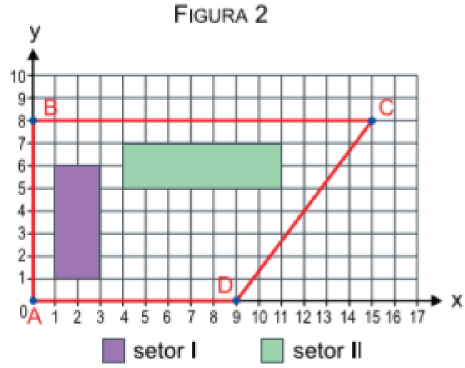
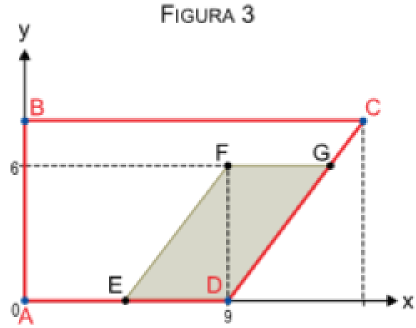


FIGURA 3



a) Para a construção dos dois pontos de observação, considere que a localização do ponto do setor I deverá ser equidistante dos pontos A e B e que a localização do ponto do setor II deverá ser equidistante dos pontos B e C. Utilizando as coordenadas do plano cartesiano da figura 2, determine uma possível localização do ponto de observação para cada um dos setores.

b) Dado que 1 unidade de distância dos planos cartesianos equivale a 200 metros de distância real, determine o perímetro da região em que serão estudados os hábitos de reprodução da espécie (figura 3).

Resolução:

a) Para a construção dos dois pontos de observação, considere que a localização do ponto do setor I deverá ser equidistante dos pontos A e B e que a localização do ponto do setor II deverá ser equidistante dos pontos B e C. Utilizando as coordenadas do plano cartesiano da figura 2, determine uma possível localização do ponto de observação para cada um dos setores.

Os pontos equidistantes de A e de B são dados pela reta $y = 4$. Como, pelo enunciado, o setor I tem valores de x tais que $1 < x < 3$, uma possível localização do ponto de observação é $(2; 4)$.

Os pontos equidistantes de B e de C são dados pela reta $x = 7{,}5$. Como, pelo enunciado, o setor II tem valores de y tais que $5 < y < 7$, uma possível localização do ponto de observação é $(7{,}5; 6)$.

b) Dado que 1 unidade de distância dos planos cartesianos equivale a 200 metros de distância real, determine o perímetro da região em que serão estudados os hábitos de reprodução da espécie (figura 3).

Figura 2

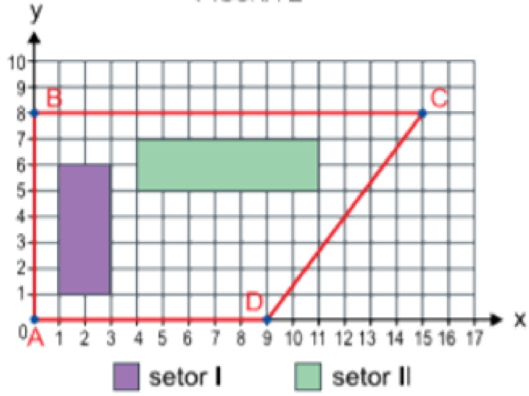
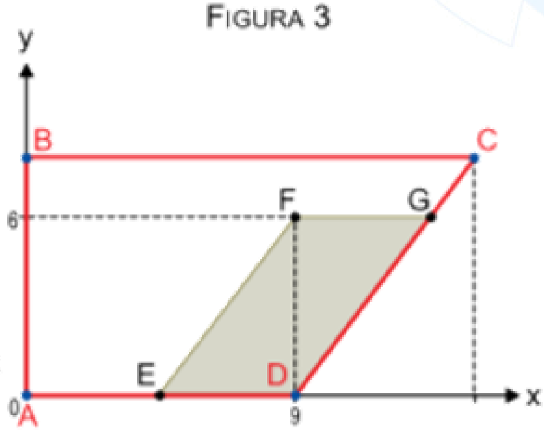


Figura 3



As coordenadas dos pontos D, E, F, G são:

$$D = (9; 0)$$
$$G = (13{,}5; 6)$$
$$F = (9; 6)$$
$$E = (4{,}5; 0)$$

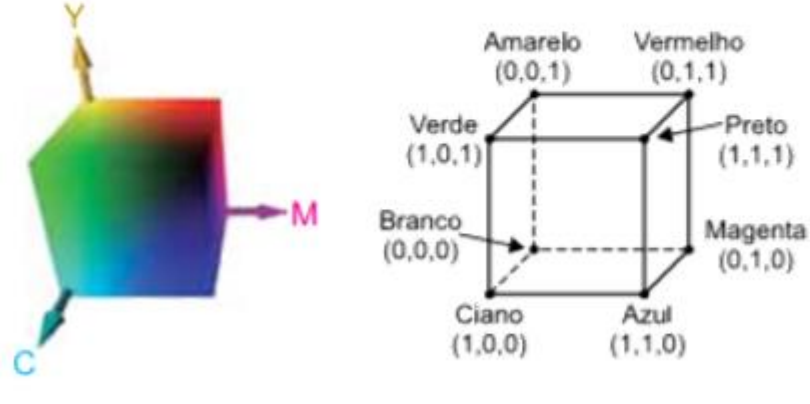
Chamando x a distância DG, temos:

$$x^2 = 6^2 + 4{,}5^2$$
$$x^2 = 36 + 20{,}25$$
$$x^2 = 56{,}25$$
$$x = 7{,}5$$

Dessa forma, o perímetro P, em metros, é dado por:

$$P = (2x + 2 \cdot 4{,}5) \cdot 200$$
$$P = (2 \cdot 7{,}5 + 2 \cdot 4{,}5) \cdot 200$$
$$P = (15 + 9) \cdot 200$$
$$P = 24 \cdot 200$$
$$P = 4800\ m$$

23) A modelagem dos sistemas de cor é essencial na computação gráfica, e um dos maiores desafios dessa área é a conversão de coordenadas de diferentes sistemas. O sistema RGB pressupõe que o sistema de processamento de cor do olho humano seja baseado nas faixas vermelha (red). verde (green) e azul (blue) do espectro visível Já o modelo CMY usa cores complementares, ciano (cyan), magenta (magenta) e amarelo (yellow), e foi importante no desenvolvimento de impressoras As cores no sistema CMY ficam delimitadas por um cubo, o cubo CMY, conforme ilustrado



(http://coopmaco.com.br)

a) A transformação de uma cor no sistema RGB, descrita por (r, g, b), para o sistema CMY, descrita por (c, m, y), é dada por $\begin{bmatrix} c \\ m \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r \\ g \\ b \end{bmatrix}$. Supondo que uma cor no sistema RGB seja descrita por $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{100}, 0\right)$, apresente as coordenadas dessa cor o sistema CMY e indique qual das oito cores detalhadas no cubo CMY está mais próxima dela.

b) O sistema NTSC (National Television Standards Committee), utilizado em emissões para a televisão, baseia-se na separação dos sinais de cor RGB em um sinal de luminosidade e dois sinais de cromaticidade Assim como no espaço RGB, as cores no espaço YIQ, utilizado no sistema NTSC, são descritas por coordenadas, sendo representadas por (y, i, q). A relação entre as cores desses dois sistemas é dada, de modo simplificado, pela expressão matricial:

$$\begin{bmatrix} y \\ i \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 2\beta & \gamma \\ 3\alpha & -\beta & -0{,}3 \\ \alpha & -0{,}5 & -3\gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r \\ g \\ b \end{bmatrix}$$

Sabendo que uma cor no sistema RGB descrita por (0,2; 0,5, 0,4) está associada a uma cor no sistema YIQ descrita por (0,4, -0,15; -0,33), determine α, β e γ.

Resolução:

a) A transformação de uma cor no sistema RGB, descrita por (r, g, b), para o sistema CMY, descrita por (c, m, y), é dada por $\begin{bmatrix} c \\ m \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r \\ g \\ b \end{bmatrix}$. Supondo que uma cor no sistema RGB seja descrita por $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{100}, 0\right)$, apresente as coordenadas dessa cor o sistema CMY e indique qual das oito cores detalhadas no cubo CMY está mais próxima dela.

Utilizando a equação matricial fornecida no enunciado, temos:

$$\begin{bmatrix} c \\ m \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r \\ g \\ b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c \\ m \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{100} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c \\ m \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{99}{100} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c \\ m \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}75 \\ 0{,}99 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = Preto$$

Assim, as coordenadas dessa cor no sistema CMY são $\begin{bmatrix} 0{,}75 \\ 0{,}99 \\ 0 \end{bmatrix}$ e a cor no cubo que está mais próxima dela é o preto.

b) O sistema NTSC (National Television Standards Committee), utilizado em emissões para a televisão, baseia-se na separação dos sinais de cor RGB em um sinal de luminosidade e dois sinais de cromaticidade Assim como no espaço RGB, as cores no espaço YIQ, utilizado no sistema NTSC, são descritas por coordenadas, sendo representadas por (y, i, q). A relação entre as cores desses dois sistemas é dada, de modo simplificado, pela expressão matricial:

$$\begin{bmatrix} y \\ i \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 2\beta & \gamma \\ 3\alpha & -\beta & -0{,}3 \\ \alpha & -0{,}5 & -3\gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r \\ g \\ b \end{bmatrix}$$

Sabendo que uma cor no sistema RGB descrita por (0,2; 0,5, 0,4) está associada a uma cor no sistema YIQ descrita por (0,4, -0,15; -0,33), determine α, β e γ.

Utilizando a equação matricial fornecida, temos:

$$\begin{bmatrix} y \\ i \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 2\beta & \gamma \\ 3\alpha & -\beta & -0{,}3 \\ \alpha & -0{,}5 & -3\gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r \\ g \\ b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}4 \\ -0{,}15 \\ -0{,}33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 2\beta & \gamma \\ 3\alpha & -\beta & -0{,}3 \\ \alpha & -0{,}5 & -3\gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}5 \\ 0{,}4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}4 \\ -0{,}15 \\ -0{,}33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}06 + \beta + 0{,}4\gamma \\ 0{,}6\alpha - 0{,}5\beta - 0{,}12 \\ 0{,}2\alpha - 0{,}25 - 1{,}2\gamma \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 0{,}06 + \beta + 0{,}4\gamma = 0{,}4 \\ 0{,}6\alpha - 0{,}5\beta - 0{,}12 = -0{,}15 \\ 0{,}2\alpha - 0{,}25 - 1{,}2\gamma = -0{,}33 \end{cases} \to \begin{cases} \beta + 0{,}4\gamma = 0{,}34 \\ 0{,}6\alpha - 0{,}5\beta = -0{,}03 \\ 0{,}2\alpha - 1{,}2\gamma = -0{,}08 \end{cases} \to \begin{cases} \beta = 0{,}34 - 0{,}4\gamma \\ 0{,}6\alpha - 0{,}5\beta = -0{,}03 \\ \alpha = \dfrac{-0{,}08 + 1{,}2\gamma}{0{,}2} \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} \beta = 0{,}34 - 0{,}4\gamma \\ 0{,}6 \cdot \left(\dfrac{-0{,}08 + 1{,}2\gamma}{0{,}2}\right) - 0{,}5 \cdot (0{,}34 - 0{,}4\gamma) = -0{,}03 \\ \alpha = \dfrac{-0{,}08 + 1{,}2\gamma}{0{,}2} \end{cases} \to$$

$$\rightarrow \begin{cases} \beta = 0{,}34 - 0{,}4\gamma \\ -0{,}24 + 3{,}6\gamma - 0{,}17 + 0{,}2\gamma = -0{,}03 \\ \alpha = \dfrac{-0{,}08 + 1{,}2\gamma}{0{,}2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \beta = 0{,}34 - 0{,}4\gamma \\ 3{,}8\gamma = 0{,}41 - 0{,}03 \\ \alpha = \dfrac{-0{,}08 + 1{,}2\gamma}{0{,}2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \beta = 0{,}34 - 0{,}4\gamma \\ 3{,}8\gamma = 0{,}38 \\ \alpha = \dfrac{-0{,}08 + 1{,}2\gamma}{0{,}2} \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \beta = 0{,}34 - 0{,}4\gamma \\ \gamma = 0{,}1 \\ \alpha = \dfrac{-0{,}08 + 1{,}2\gamma}{0{,}2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \beta = 0{,}34 - 0{,}4 \cdot 0{,}1 \\ \gamma = 0{,}1 \\ \alpha = \dfrac{-0{,}08 + 1{,}2 \cdot 0{,}1}{0{,}2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \beta = 0{,}3 \\ \gamma = 0{,}1 \\ \alpha = 0{,}2 \end{cases}$$

Assim, os valores de α, β e γ são tais que $\begin{cases} \beta = 0{,}3 \\ \gamma = 0{,}1 \\ \alpha = 0{,}2 \end{cases}$.

24) A penicilina benzatina é um antibiótico indicado no tratamento de certas infecções, e sua meia-vida é de 336 horas. Ou seja, após esse período de tempo a quantidade de medicamento no sangue reduz-se pela metade. O tratamento convencional é feito com uma aplicação de 1200000 Ul do medicamento e essa dose mantém-se em quantidade adequada no sangue (isto é, não inferior a 300000 Ul) durante os 28 dias seguintes. A dosagem, o número de doses e o intervalo de tempo entre as doses depende da doença a ser tratada.

a) Considere um paciente que recebeu 2 doses, cada uma de 1200000 Ul, desse medicamento, sendo que a segunda dose foi aplicada 28 dias após a primeira dose. Faça um esboço gráfico na malha presente no campo de Resolução e Resposta, representando a quantidade desse medicamento no sangue ao longo de 8 semanas de tratamento.

b) Considere outro caso, em que um paciente foi tratado com 2 doses, cada uma de 2400000 Ul, de penicilina benzatina, sendo a segunda dose aplicada 14 dias após a primeira. Determine a quantidade desse medicamento no sangue do paciente, em Ul, logo após ele tomar a segunda dose e indique durante quantos dias completos, após essa segunda dose, a quantidade de medicamento permanecerá em quantidade adequada no sangue desse paciente.

Adote em seus cálculos log2 = 0,30; log3 = 0,48

Resolução:

a) Considere um paciente que recebeu 2 doses, cada uma de 1200000 Ul, desse medicamento, sendo que a segunda dose foi aplicada 28 dias após a primeira dose. Faça um esboço gráfico na malha presente no campo de Resolução e Resposta, representando a quantidade desse medicamento no sangue ao longo de 8 semanas de tratamento.

O tempo de meia vida de 336 horas é equivalente a $\frac{336}{24}$ dias, ou seja, 14 dias, ou ainda, 2 semanas.

Dessa forma, a progressão em UI a cada duas semanas é a seguinte:

$$semana\ 0 = 1\ 200\ 000$$

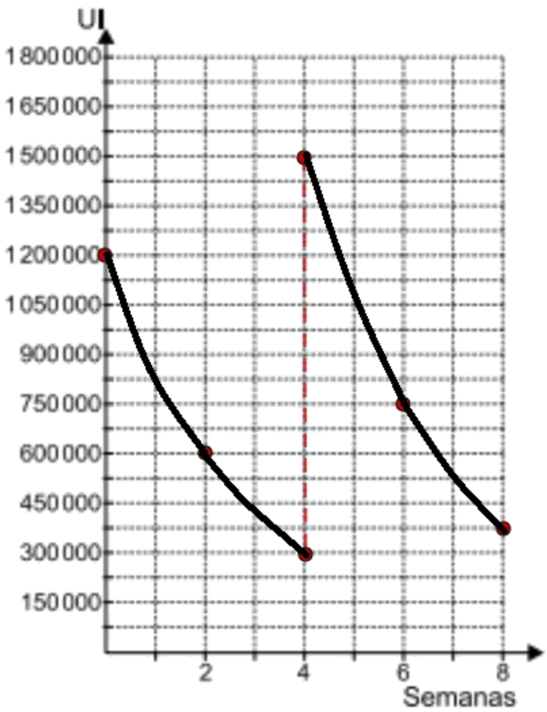
$$semana\ 2 = 600\ 000$$

$$semana\ 4 = 300\ 000 + 1\ 200\ 000 = 1\ 500\ 000$$

$$semana\ 6 = 150\ 000 + 600\ 000 = 750\ 000$$

$$semana\ 8 = 150\ 000 + 300\ 000 = 375\ 000$$

Colocando esses valores no gráfico, temos:



b) Considere outro caso, em que um paciente foi tratado com 2 doses, cada uma de 2400000 UI, de penicilina benzatina, sendo a segunda dose aplicada 14 dias após a primeira. Determine a quantidade desse medicamento no sangue do paciente, em UI, logo após ele tomar a segunda dose e indique durante quantos dias completos, após essa segunda dose, a quantidade de medicamento permanecerá em quantidade adequada no sangue desse paciente.

Adote em seus cálculos log2 = 0,30; log3 = 0,48

Inicialmente, temos a seguinte progressão:

$$semana\ 0 = 2\ 400\ 000$$

$$semana\ 2 = 1\ 200\ 000 + 2\ 400\ 000 = 3\ 600\ 000$$

Assim, a quantidade desse medicamento no sangue do paciente, em UI, logo após ele tomar a segunda dose é de 3 600 000 UI.

Calculando a quantidade n de períodos de meia vida para que a concentração não seja superior a 300 000 UI:

$$3\,600\,000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq 300\,000$$

$$12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq 1$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \geq \frac{1}{12}$$

$$log\left(\frac{1}{2}\right)^n \geq \log\left(\frac{1}{12}\right)$$

$$n \cdot log\left(\frac{1}{2}\right) \geq \log\left(\frac{1}{12}\right)$$

$$n \cdot (log1 - \log 2) \geq (log1 - \log 12)$$

$$n \cdot (log1 - \log 2) \geq (log1 - \log 2^2 - \log 3)$$

$$n \cdot (0 - 0{,}3) \geq (0 - 2 \cdot 0{,}3 - 0{,}48)$$

$$-0{,}3n \geq -0{,}6 - 0{,}48$$

$$n \leq \frac{-1{,}08}{-0{,}3}$$

$$n \leq 3{,}6\ períodos$$

Como cada período de meia vida é de 14 dias, temos:

$$n \leq 3{,}6 \cdot 14\ dias$$

$$n \leq 50{,}4\ dias$$

Assim, a quantidade permanece adequada até 50 dias após o paciente tomar a segunda dose.