Estratégia Militares

Resolução Prova Matemática

ITA 2020

Professor Victor So

Prova de Matemática ITA 2020

1. (ITA/2020)

Seja λ a circunferência que passa pelos pontos $P = (1, 1), Q = (13, 1)$ e $R = (7, 9)$. Determine:

a) A equação de λ.

b) Os vértices do quadrado $ABCD$ circunscrito a λ, sabendo que R é o ponto médio de $\overline{AB}$.

2. (ITA/2020)

Lançando três dados de 6 faces, numeradas de 1 a 6, sem ver o resultado, você é informado de que a soma dos números observados na face superior de cada dado é igual a 9. Determine a probabilidade de o número observado em cada uma dessas faces ser um número ímpar.

3. (ITA/2020)

Dizemos que um número natural n é um cubo perfeito se existe um número natural a tal que $n = a^3$. Determine o subconjunto dos números primos que podem ser escritos como soma de dois cubos perfeitos.

4. (ITA/2020)

Sejam a e b dois números reais. Sabendo que o conjunto dos números reais k para os quais a reta $y = kx$ intersecta a parábola $y = x^2 + ax + b$ é igual a $(-\infty, 2] \cup [6, +\infty)$, determine os números a e b.

5. (ITA/2020)

Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^6 - 10x^4 - 4x^3 + 25x^2 + 20x + 28$.

a) Determine dois números reais α e β de modo que f possa ser reescrita como $f(x) = (x^3 - 5x + \alpha)^2 + \beta$.

b) Determine o valor mínimo de f.

c) Determine o(s) ponto(s) $x \in \mathbb{R}$ onde f assume seu valor mínimo.

6. (ITA/2020)

Seja $z \in \mathbb{C}$ uma raiz da equação $4z^2 - 4z \operatorname{sen} \alpha + 1 = 0$, para $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Determine, em função de α, todos os possíveis valores para:

a) $2z + \frac{1}{2z}$.

b) $(2z)^{15} + \frac{1}{(2z)^{15}}$.

7. (ITA/2020)

Seja H o hexágono no plano de Argand-Gauss cujos vértices são as raízes do polinômio $p(x) = \left(x - \sqrt{3}\right)^6 + 64$. Determine $z \in \mathbb{C}$ sabendo que o conjunto $M = \{zx \in \mathbb{C} : x \in H\}$ é o hexágono que possui $v_1 = -1 + \sqrt{3}i$, $v_2 = 1 - \sqrt{3}i$ e $v_3 = 5 - \sqrt{3}i$ como três vértices consecutivos.

8. (ITA/2020)

Considera a circunferência λ de centro O passando por um ponto A. Sejam B um ponto tal que A é o ponto médio de $\overline{OB}$ e M um ponto de λ tal que $A\hat{O}M = 100°$. Seja r a reta tangente à λ passando por M. Seja $\overline{DE}$ a projeção ortogonal do segmento $\overline{AB}$ sobre a reta r. Determine, em graus, a medida do ângulo $A\hat{E}B$.

9. (ITA/2020)

Determine todos os números inteiros k entre 0 e 200 para os quais o polinômio $p_k(x) = x^3 - x^2 - k$ possui uma única raiz inteira. Para cada um desses valores de k, determine a raiz inteira correspondente.

10. (ITA/2020)

Considere uma pirâmide reta P cuja base é um hexágono regular de lado l. As faces laterais dessa pirâmide formam um ângulo diedro de 75° com a base da própria pirâmide. Sabendo que P está inscrita em uma esfera, determine o raio dessa esfera.

Gabarito

1. a) $(x-7)^2 + \left(y - \frac{11}{4}\right)^2 = \frac{625}{16}$ b) $A\left(\frac{3}{4}, 9\right)$ $B\left(\frac{53}{4}, 9\right)$ $C\left(\frac{53}{4}, \frac{-7}{2}\right)$ $D\left(\frac{3}{4}, \frac{-7}{2}\right)$
2. $7/25$
3. $S = \{2\}$
4. $a = 4$ e $b = 1$
5. a) $\alpha = -2$ e $\beta = 24$ b) $f_{mín}(x) = 24$ c) $-2; 1 + \sqrt{2}; 1 - \sqrt{2}$
6. a) $2sen\alpha$ b) $-2\text{sen}(15\alpha)$
7. $z = \sqrt{3} + i$

8. $\mathbf{40°}$
9. $\boldsymbol{S = \{2; 3; 4; 5; 6\}}$
10. $\boldsymbol{R = l \cdot \left(\frac{14\sqrt{3}-3}{12}\right)}$

Prova Resolvida e Comentada

1. (ITA/2020)

Seja λ a circunferência que passa pelos pontos $P = (1, 1), Q = (13, 1)$ e $R = (7, 9)$. Determine:

a) A equação de λ.

b) Os vértices do quadrado $ABCD$ circunscrito a λ, sabendo que R é o ponto médio de $\overline{AB}$.

Comentários

a) Equação da circunferência de raio r centrada no ponto $O(a, b)$:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Substituindo os pontos dados:

$$Equação\ 1 \to P(1{,}1): (1-a)^2 + (1-b)^2 = r^2$$

$$Equação\ 2 \to Q(13{,}1):\ (13-a)^2 + (1-b)^2 = r^2$$

$$Equação\ \ \to R(7{,}9):\ (7-a)^2 + (9-b)^2 = r^2$$

De eq. 1 e eq. 2:

$$(1-a)^2 = (13-a)^2$$

$$1 - 2a + a^2 = 169 - 26a + a^2$$

$$24a = 168$$

$$\boxed{a = 7}$$

Substituindo o valor de a na eq. 1:

$$(1-7)^2 + (1-b)^2 = r^2$$

$$Equação\ 4 \to 36 + (1-b)^2 = r^2$$

Substituindo o valor de a na eq. 3:

$$(7-7)^2 + (9-b)^2 = r^2$$

$$Equação\ 5 \to r^2 = (9-b)^2$$

Das eq. 4 e 5:

$$36 + (1-b)^2 = (9-b)^2 \therefore 36 + 1 - 2b + b^2 = 81 - 18b + b^2 \therefore 16b = 44 \therefore \boxed{b = \frac{11}{4}}$$

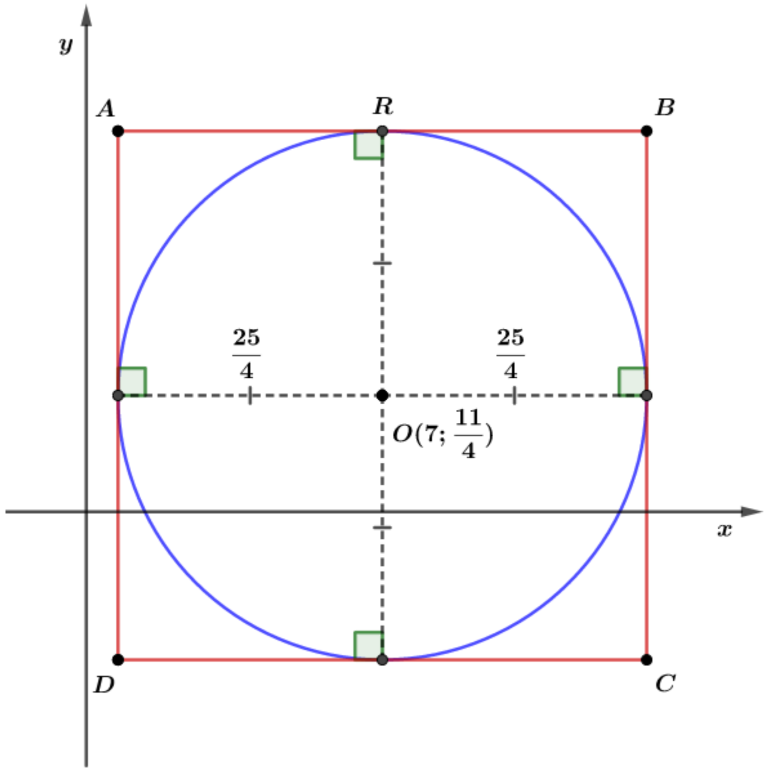
Substituindo o valor de b na eq. 5:

$$r^2 = \left(9 - \frac{11}{4}\right)^2 \therefore \boxed{r = \frac{25}{4}}$$

Portanto, a equação da circunferência será:

$$(x-7)^2 + \left(y - \frac{11}{4}\right)^2 = \frac{625}{16}$$

b) Percebendo que o centro da circunferência está na mesma abscissa que o ponto R, o lado AB do quadrado é tangente à circunferência em R e paralelo ao eixo x. Assim:



Logo:

$$A = \left(7 - \frac{25}{4}, \frac{11}{4} + \frac{25}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}, 9\right)$$

$$B = \left(7 + \frac{25}{4}, \frac{11}{4} + \frac{25}{4}\right) = \left(\frac{53}{4}, 9\right)$$

$$C = \left(7 + \frac{25}{4}, \frac{11}{4} - \frac{25}{4}\right) = \left(\frac{53}{4}, \frac{-7}{2}\right)$$

$$D = \left(7 - \frac{25}{4}, \frac{11}{4} - \frac{25}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}, \frac{-7}{2}\right)$$

Gabarito: a) $(x-7)^2 + \left(y - \frac{11}{4}\right)^2 = \frac{625}{16}$ **b)** $A\left(\frac{3}{4}, 9\right)$ $B\left(\frac{53}{4}, 9\right)$ $C\left(\frac{53}{4}, \frac{-7}{2}\right)$ $D\left(\frac{3}{4}, \frac{-7}{2}\right)$

2. (ITA/2020)

Lançando três dados de 6 faces, numeradas de 1 a 6, sem ver o resultado, você é informado de que a soma dos números observados na face superior de cada dado é igual a 9. Determine a probabilidade de o número observado em cada uma dessas faces ser um número ímpar.

Comentários

Sejam $a, b, c \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ os números rolados nos três dados. Queremos a probabilidade condicional de a, b, c serem ímpares, sabendo que $a + b + c = 9$.

Em geral,

$$\Pr(A|B) = \frac{Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$$

Logo,

$$\Pr\,(a, b, c\ ímpares \mid a + b + c = 9) = \frac{\Pr(a, b, c \text{ ímpares} \wedge\ a + b + c = 9)}{\Pr(a + b + c = 9)}$$

Como o conjunto universo é o mesmo, podemos trocar $\Pr(X)$ por $n(X)$.

I) $n(a + b + c = 9) = ?$

Vamos listar as possibilidades para a soma dar 9, que são poucas:

$$\underbrace{\begin{cases} 1+2+6 \\ 1+3+5 \\ \vdots \\ \underline{1+6+2} \end{cases}}_{5\ maneiras} \quad \underbrace{\begin{cases} 2+1+6 \\ 2+2+5 \\ \vdots \\ \underline{2+6+1} \end{cases}}_{6\ maneiras} \quad \underbrace{\begin{cases} 3+1+5 \\ 3+2+4 \\ \vdots \\ \underline{3+5+1} \end{cases}}_{5\ maneiras} \quad \underbrace{\begin{cases} 4+1+4 \\ 4+2+3 \\ \vdots \\ \underline{4+4+1} \end{cases}}_{4\ maneiras}$$

$$\underbrace{\begin{cases} 5+1+3 \\ 5+2+2 \\ \underline{5+3+1} \end{cases}}_{3\ maneiras} \quad \underbrace{\begin{cases} 6+1+2 \\ \underline{6+2+1} \end{cases}}_{2\ maneiras}$$

Total $= 5 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 = 25$ maneiras de somar 9

II) $n(a, b, c \text{ ímpares e } a + b + c = 9) = ?$

Quantas das somas acima contém apenas números ímpares?

$1 + 3 + 5$
$1 + 5 + 3$
$3 + 1 + 5$
$3 + 3 + 3$

$3+5+1$
$5+1+3$
$5+3+1$

Há 7 triplas ordenadas de soma 9 com números contidos em $\{1,3,5\}$.

Logo,

$$\frac{\Pr(a,b,c \text{ ímpares e } a+b+c=9)}{\Pr(a+b+c=9)}=\frac{\mathrm{n}(a,b,c \text{ ímpares e } a+b+c=9)}{\mathrm{n}(a+b+c=9)}=\frac{7}{25}$$

Gabarito: $7/25$

---

3. (ITA/2020)

Dizemos que um número natural n é um cubo perfeito se existe um número natural a tal que $n=a^3$. Determine o subconjunto dos números primos que podem ser escritos como soma de dois cubos perfeitos.

Comentários

Sejam $a,b\in\mathbb{N}$ tais que $a^3+b^3=p$, com p primo. Assim, temos:

$$p=\underbrace{a^3+b^3}_{\in\mathbb{N}}=\underbrace{(a+b)}_{\in\mathbb{N}}\underbrace{(a^2-ab+b^2)}_{\in\mathbb{N}}$$

Como p é primo, temos duas possibilidades para os fatores:

I) $a+b=1$ e $a^2-ab+b^2=p$

Como $a,b\in\mathbb{N}$, temos de $a+b=1$ que as soluções são:

$$a=1 \text{ e } b=0 \text{ ou } a=0 \text{ e } b=1$$

Substituindo $a=1$ e $b=0$ na equação $a^2-ab+b^2=p$:

$$1^2=p\Rightarrow p=1$$

Como 1 não é primo, temos que esses valores de a e b não convém, analogamente para $a=0$ e $b=1$. Assim, devemos analisar o segundo caso.

II) $a+b=p$ e $a^2-ab+b^2=1$

Fazendo $a=p-b$, temos:

$$(p-b)^2-(p-b)b+b^2=1$$
$$p^2-2pb+b^2-pb+b^2+b^2=1$$
$$p^2-3bp+3b^2-1=0$$

Analisando o discriminante:

$$\Delta = (3b)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3b^2 - 1) = 4 - 3b^2$$

Como p é a soma de dois naturais, temos que p também é natural, logo devemos ter $\Delta \geq 0$:

$$4 - 3b^2 \geq 0 \Rightarrow b^2 \leq \frac{4}{3}$$

Como $b \in \mathbb{N}$, a única possibilidade é $b = 1$.

Encontrando as raízes para p:

$$p = \frac{3b \pm \sqrt{4 - 3b^2}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = 2 \; ou \; 1$$

Como 1 não é primo, temos $p = 2$.

Para esse valor de p:

$$a + b = p \Rightarrow a + 1 = 2 \therefore a = 1$$

Portanto, o subconjunto dos números primos que satisfazem ao problema é $S = \{2\}$.

Gabarito: $\boldsymbol{S = \{2\}}$**.**

---

4. (ITA/2020)

Sejam a e b dois números reais. Sabendo que o conjunto dos números reais k para os quais a reta $y = kx$ intersecta a parábola $y = x^2 + ax + b$ é igual a $(-\infty, 2] \cup [6, +\infty)$, determine os números a e b.

Comentários

Devemos ter que:

$$kx = x^2 + ax + b$$

$$x^2 + (a - k)x + b = 0$$

$$\Delta = (a - k)^2 - 4b \geq 0 \text{ (pois existe intersecção)}$$

$$a^2 - 2ak + k^2 - 4b \geq 0$$

$$k^2 - 2ak + a^2 - 4b \geq 0 \;\; (I)$$

$$\Delta' = (-2a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a^2 - 4b) = 4a^2 - 4a^2 + 16b$$

$$\Rightarrow \Delta' = 16b$$

Encontrando as raízes em k:

$$\begin{cases} k_1 = \dfrac{2a + \sqrt{16b}}{2} = a + 2\sqrt{b} \\ k_2 = \dfrac{2a - \sqrt{16b}}{2} = a - 2\sqrt{b} \end{cases}$$

O intervalo que satisfaz a inequação (I) é:

$$k \in \left(-\infty, a - 2\sqrt{b}\right] \cup \left[a + 2\sqrt{b}, +\infty\right)$$

Comparando com o intervalo dado no enunciado:

$$k \in (-\infty, 2] \cup [6, +\infty)$$

Temos que:

$$\begin{cases} a + 2\sqrt{b} = 6 \\ a - 2\sqrt{b} = 2 \end{cases} \Rightarrow (a, b) = (4,1)$$

Gabarito: $\boldsymbol{a = 4}$ **e** $\boldsymbol{b = 1}$

---

5. (ITA/2020)

Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^6 - 10x^4 - 4x^3 + 25x^2 + 20x + 28$.

a) Determine dois números reais α e β de modo que f possa ser reescrita como $f(x) = (x^3 - 5x + \alpha)^2 + \beta$.

b) Determine o valor mínimo de f.

c) Determine o(s) ponto(s) $x \in \mathbb{R}$ onde f assume seu valor mínimo.

Comentários

a) $f(x) = (x^3 - 5x + \alpha)^2 + \beta$

$$f(x) = x^6 + 25x^2 + \alpha^2 + 2\alpha x^3 - 10\alpha x - 10x^4 + \beta$$

$$f(x) = x^6 - 10x^4 + 2\alpha x^3 + 25x^2 - 10\alpha x + \alpha^2 + \beta$$

Comparando a equação encontrada com a equação da função dada:

$$2\alpha x^3 = -4x^3 \therefore \alpha = -2 \text{ ou } -10\alpha x = 20x \therefore \alpha = -2$$

&

$$\alpha^2 + \beta = 28 \therefore 4 + \beta = 28 \therefore \beta = 24$$

b) Substituindo os valores encontrados:

$$f(x) = (x^3 - 5x - 2)^2 + 24$$

$$f(x) = q(x) + 24$$

Como $q(x) \geq 0$, $f(x)mín = 24$

c) $q(x) = (x^3 - 5x - 2)^2 = 0$

Por verificação, percebe-se que -2 é raiz.

Então: $q(x) = (x + 2)(x^2 - 2x - 1)$

Resolvendo a equação de segundo grau: as raízes obtidas são: $1 + \sqrt{2}$ e $1 - \sqrt{2}$

Logo, as raízes de $q(x)$ são -2, $(1 + \sqrt{2})$ e $(1 - \sqrt{2})$.

Gabarito: a) $\boldsymbol{\alpha = -2}$ **e** $\boldsymbol{\beta = 24}$ **b)** $\boldsymbol{f_{mín}(x) = 24}$ **c)** $\boldsymbol{-2; 1 + \sqrt{2}; 1 - \sqrt{2}}$

---

6. (ITA/2020)

Seja $z \in \mathbb{C}$ uma raiz da equação $4z^2 - 4z \operatorname{sen} \alpha + 1 = 0$, para $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Determine, em função de α, todos os possíveis valores para:

a) $2z + \frac{1}{2z}$.

b) $(2z)^{15} + \frac{1}{(2z)^{15}}$.

Comentários

Como z é raiz da equação, por teste, temos que $z \neq 0$.

Assim, vamos dividir a equação $4z^2 - 4zsen\alpha + 1 = 0$ por $2z$.

$$2z - 2sen\alpha + \frac{1}{2z} = 0$$

$$\Rightarrow 2z + \frac{1}{2z} = 2sen\alpha$$

a) $2z + \frac{1}{2z} = 2sen\alpha$

b) Seja $w = 2z = |w|cis\theta$, vamos encontrar $|w|$ a partir do $|z|$. Para isso, vamos resolver a equação dada no enunciado:

$$4z^2 - 4zsen\alpha + 1 = 0$$

$$\Delta = (-4sen\alpha)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = -16cos^2\alpha$$

Como $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, podemos escrever que:

$$z = \frac{4sen\alpha \pm 4cos\alpha\, i}{2 \cdot 4}$$

$$z = \frac{1}{2}(sen\alpha \pm i\, cos\alpha)$$

$$|z| = \frac{1}{2}$$

Dessa forma, podemos concluir que $|w| = 1$.

$$w + \frac{1}{w} = 2sen\alpha$$

$$cis\theta + \frac{1}{cis\theta} = 2sen\alpha$$

$$(cos\theta + isen\theta) + (cos\theta - isen\theta) = 2sen\alpha$$

$$2\cos\theta = 2sen\alpha$$

$$cos\theta = sen\alpha \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

Dessa forma,

$$(2z)^{15} + \frac{1}{(2z)^{15}} = w^{15} + \frac{1}{w^{15}} = cis^{15}\theta + \frac{1}{cis^{15}\theta} = 2\cos(15\theta) = 2\cos\left(\frac{15\pi}{2} - 15\alpha\right) =$$

$$2\cos\left(\frac{15\pi}{2}\right)\cos(15\alpha) + 2sen\left(\frac{15\pi}{2}\right)\text{sen}(15\alpha) = -2\text{sen}(15\alpha)$$

$$\therefore (2z)^{15} + \frac{1}{(2z)^{15}} = -2\text{sen}(15\alpha)$$

Gabarito: a) $2sen\alpha$ b) $-2\text{sen}(15\alpha)$

---

7. (ITA/2020)

Seja H o hexágono no plano de Argand-Gauss cujos vértices são as raízes do polinômio $p(x) = \left(x - \sqrt{3}\right)^6 + 64$. Determine $z \in \mathbb{C}$ sabendo que o conjunto $M = \{zx \in \mathbb{C} : x \in H\}$ é o hexágono que possui $v_1 = -1 + \sqrt{3}i$, $v_2 = 1 - \sqrt{3}i$ e $v_3 = 5 - \sqrt{3}i$ como três vértices consecutivos.

Comentários

Vamos encontrar os vértices do hexágono H:

$$p(x) = \left(x - \sqrt{3}\right)^6 + 64 = 0$$

$$\left(x - \sqrt{3}\right)^6 = -64 = -2^6 = 2^6 \cdot cis(\pi + 2k\pi)$$

$$x_k - \sqrt{3} = 2 \cdot cis\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow x_k = \sqrt{3} + 2 \cdot cis\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}\right)$$

Os vértices são dados por:

$$x_1 = \sqrt{3} + 2 \cdot cis\left(\frac{\pi}{6} + 0 \cdot \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} + 2 \cdot cis\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = 2\sqrt{3} + i$$

$$x_2 = \sqrt{3} + 2 \cdot cis\left(\frac{\pi}{6} + 1 \cdot \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} + 2 \cdot cis\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3} + 2i$$

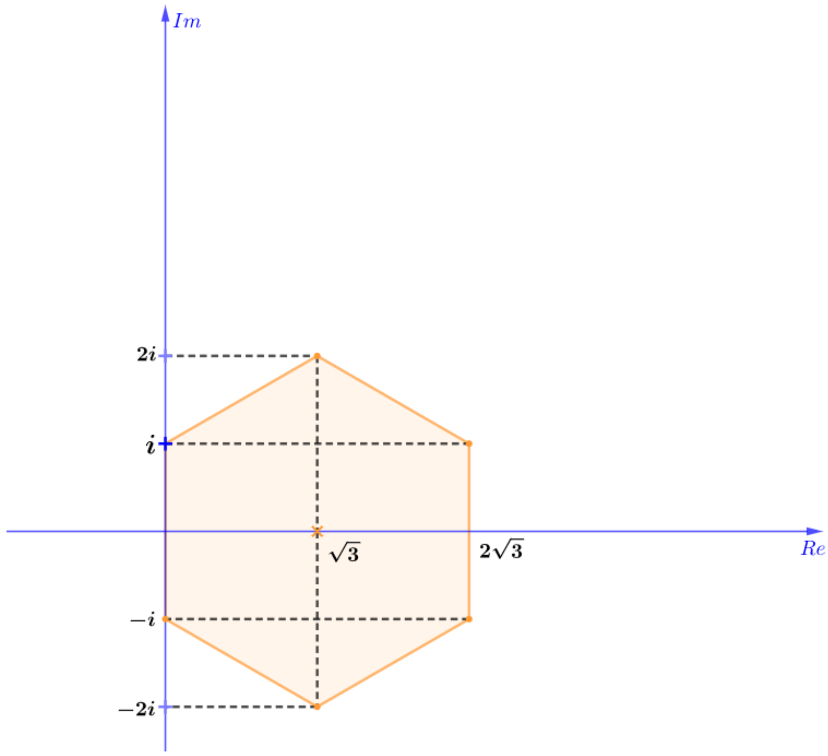
$$x_3 = \sqrt{3} + 2 \cdot cis\left(\frac{\pi}{6} + 2 \cdot \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} + 2 \cdot cis\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = i$$

$$x_4 = \sqrt{3} + 2 \cdot cis\left(\frac{\pi}{6} + 3 \cdot \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} + 2 \cdot cis\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = -i$$

$$x_5 = \sqrt{3} + 2 \cdot cis\left(\frac{\pi}{6} + 4 \cdot \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} + 2 \cdot cis\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sqrt{3} - 2i$$

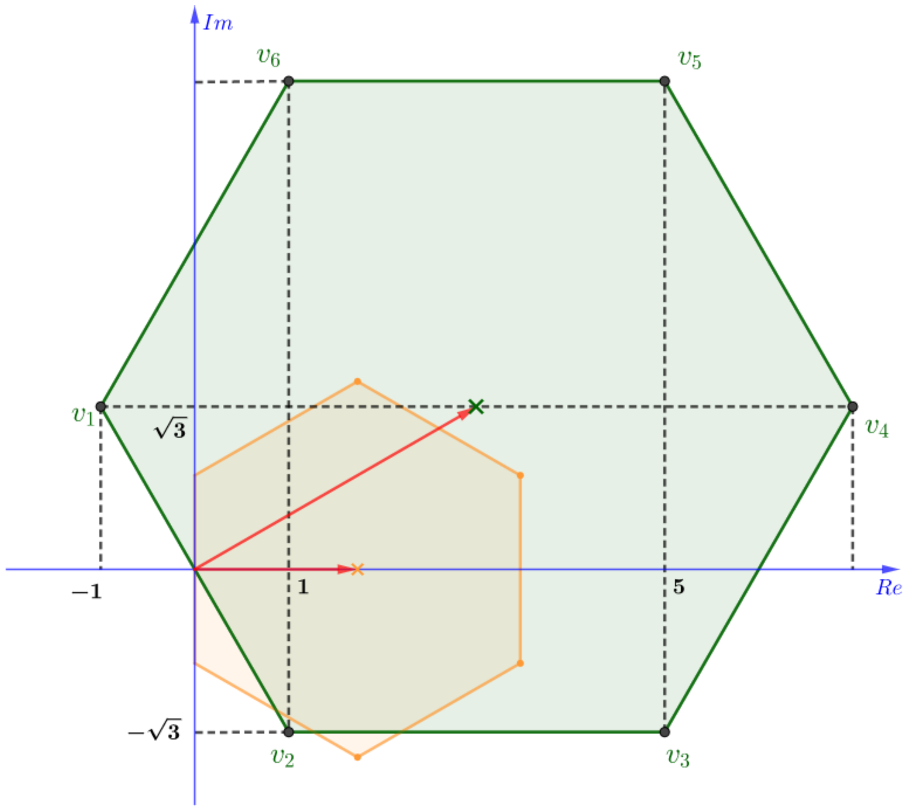
$$x_6 = \sqrt{3} + 2 \cdot cis\left(\frac{\pi}{6} + 5 \cdot \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} + 2 \cdot cis\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = 2\sqrt{3} - i$$

Esboçando os pontos no plano de Argand-Gauss:



Note que o centro do hexágono H é o ponto $x_0 = \sqrt{3}$ e ele possui lado de medida 2 (basta ver a distância do vértice i ao vértice $-i$).

Sabendo que o hexágono M é formado pelos vértices consecutivos $v_1 = -1 + \sqrt{3}i$, $v_2 = 1 - \sqrt{3}i$ e $v_3 = 5 - \sqrt{3}i$, temos o seguinte esboço:



Estamos interessados em saber qual o número complexo z que transforma o hexágono H no hexágono M. O bizu aqui é analisar os centros dos hexágonos e usar a forma polar do complexo z:

$$z = |z| \cdot cis\ \theta$$

O centro do hexágono H é o ponto:

$$x_0 = \sqrt{3}$$

Observando-se a figura, podemos ver que o lado do hexágono M mede 4 (distância de v_2 até v_3). Além disso, o centro do hexágono M é:

$$parte\ real \to Re(v_2) + \frac{4}{2} = 1 + 2 = 3$$

$$parte\ imaginária \to \sqrt{3}i$$

Assim, o centro de M é $v_0 = 3 + \sqrt{3}i$.

Como M é formado pelo hexágono H pela multiplicação de z, e os lados dos hexágonos H e M medem, respectivamente, 2 e 4, temos que o módulo de z é:

$$|z| = \frac{4}{2} = 2$$

Como o argumento do centro do hexágono H é $0°$, temos que o argumento de z será igual ao argumento do centro de M, logo:

$$\arg(z) = arctg\left(\frac{Im(v_0)}{Re(v_0)}\right) = arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 30°$$

Portanto, o complexo z é:

$$z = |z|cis\theta = 2cis(30°) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = \sqrt{3} + i$$

$$\therefore z = \sqrt{3} + i$$

Gabarito: $\boldsymbol{z = \sqrt{3} + i}$

---

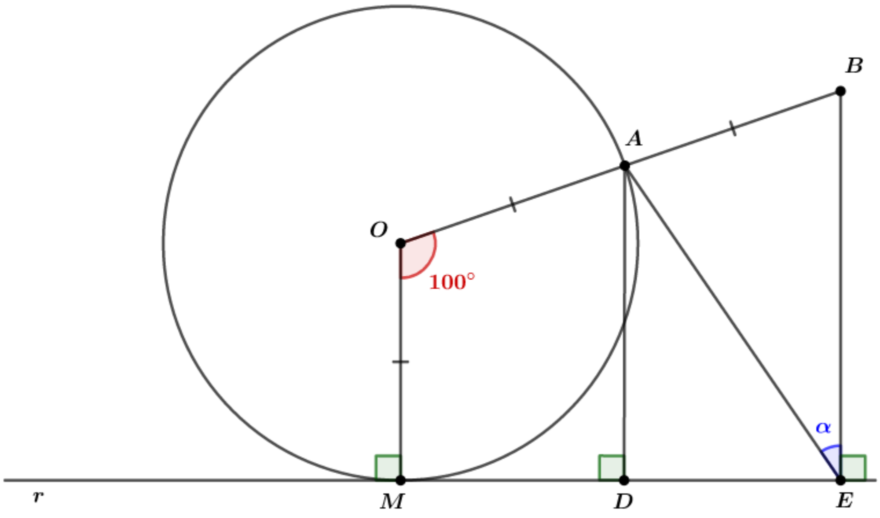
8. (ITA/2020)

Considera a circunferência λ de centro O passando por um ponto A. Sejam B um ponto tal que A é o ponto médio de $\overline{OB}$ e M um ponto de λ tal que $A\hat{O}M = 100°$. Seja r a reta tangente à λ passando por M. Seja $\overline{DE}$ a projeção ortogonal do segmento $\overline{AB}$ sobre a reta r. Determine, em graus, a medida do ângulo $A\hat{E}B$.

Comentários

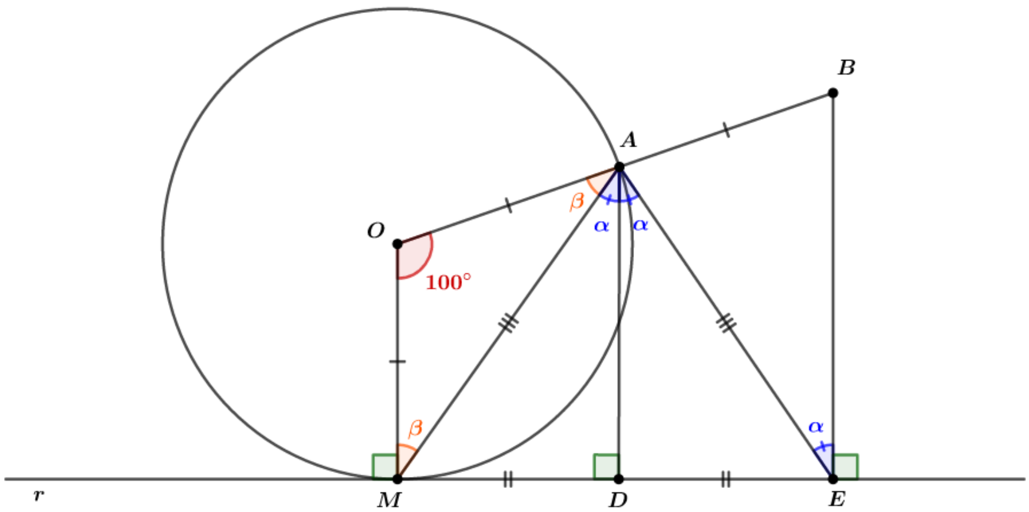
Solução 1)

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Como $OM = OA = AB$ (raio da circunferência), temos que ΔMOA é isósceles. Além disso, $OM//AD//BE$, logo $OA = AB$ implica $MD = DE$, ou seja, AD é mediatriz do ΔAME. Portanto, ΔAME é isósceles com $AM = AE$.

Sendo $A\hat{E}B = \alpha$ e $AD//BE$, temos $D\hat{A}E = \alpha$, logo:

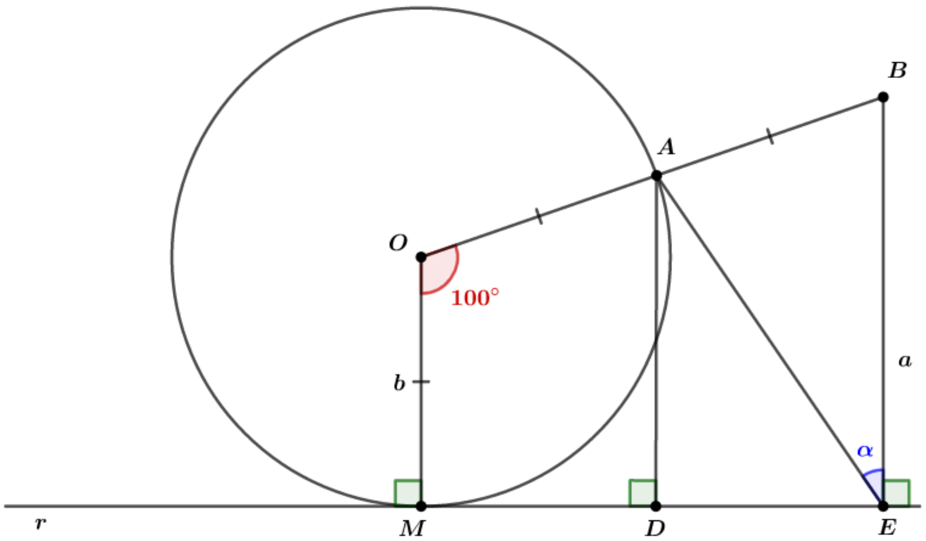


Pela figura, podemos ver do ΔMOA:

$$100° + 2\beta = 180° \Rightarrow \beta = 40°$$

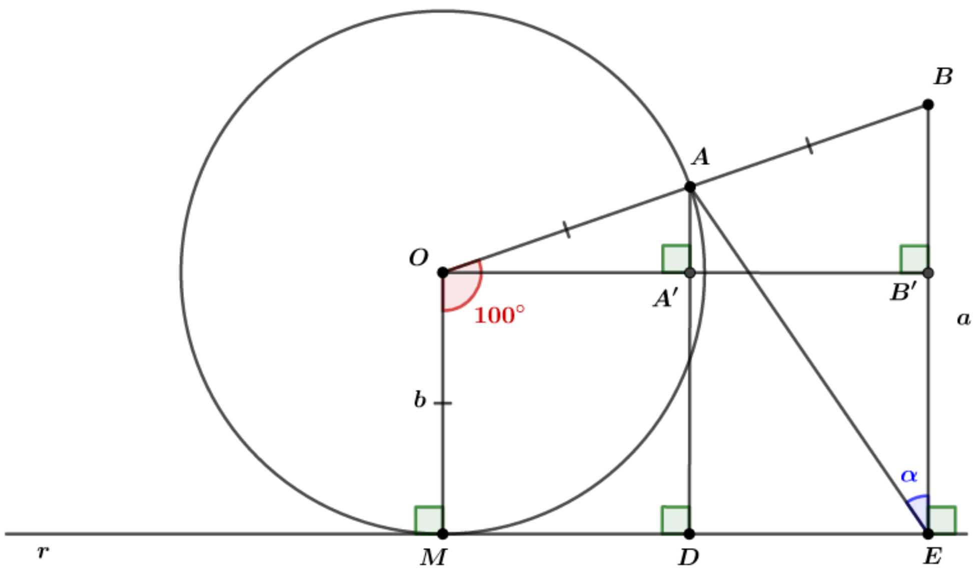
Como $OM//AD$, concluímos que $\alpha = \beta = 40°$.

Solução 2)



Percebe-se que AD é base média do trapézio MOBE. Sendo $BE = a$, e $MO = AO = AB = b$, tem-se $AD = \frac{a+b}{2}$.

Traçando-se uma paralela a ME por O, tem-se o ponto A’ na interseção entre a reta traçada e AD e o ponto B’ na interseção da linha traçada e BE.



$$AA' = \frac{a+b}{2} - b = \frac{a-b}{2}$$

$$BB' = a - b$$

Seja $A\hat{E}B = \alpha$.

Lei dos senos $\Delta AA'O$:

$$\frac{\frac{a+b}{2}}{sen\ B'OB} = \frac{b}{sen\ OA'A} \therefore a = b(2\ sen\ B'OB + 1)$$

Como MÔA = 100°, B’OB = 10°: $a = b(2\,sen\,10° + 1)$

Lei dos senos ΔABE:

$$\frac{b}{sen\,\alpha} = \frac{a}{sen\,(B\hat{A}E - \alpha)}$$

$$\therefore a\,sen\,\alpha = b\,sen\,(B\hat{A}E - \alpha)$$

Substituindo o valor de a:

$$b(2\,sen\,10° + 1)sen\,\alpha = b\,sen\,\left(B\hat{A}E - \alpha\right)$$

$$(2\,sen\,10° + 1)sen\,\alpha = sen\,B\hat{A}E\,.\cos\alpha - \cos B\hat{A}E\,.sen\,\alpha$$

Sendo BÂE = 100° e $sen\,10° = -cos\,100°$:

$$(-2\,cos\,100° + 1)sen\,\alpha = sen\,100°\,.\cos\alpha - \cos 100°\,.sen\,\alpha$$

$$sen\,\alpha = sen\,100°\,.\cos\alpha + \cos 100°\,.sen\,\alpha$$

$$]sen\,\alpha = sen\,(100° + \alpha)$$

$$1^{\underline{a}}\,possibilidade: 100° + \alpha = \alpha\ (não\ convém)$$

$$2^{\underline{a}}\,possibilidade: \alpha + 100° + \alpha = 180° \therefore x = 40°$$

Gabarito: $40°$

---

9. (ITA/2020)

Determine todos os números inteiros k entre 0 e 200 para os quais o polinômio $p_k(x) = x^3 - x^2 - k$ possui uma única raiz inteira. Para cada um desses valores de k, determine a raiz inteira correspondente.

Comentários

Suponha que $\alpha \in \mathbb{Z}$ seja a raiz inteira do polinômio. Aplicando-se o dispositivo prático de Briot-Ruffini, temos:

α	1	-1	0	$-k$
	1	$\alpha - 1$	$\alpha^2 - \alpha$	$\alpha^3 - \alpha^2 - k$

Assim, podemos escrever:

$$p_k(x) = (x - \alpha)[x^2 + (\alpha - 1)x + \alpha^2 - \alpha]$$

$$Resto = \alpha^3 - \alpha^2 - k = 0$$

Do resto, temos:

$$\alpha^3 - \alpha^2 - k = 0 \Rightarrow \alpha^2(\alpha - 1) = k$$

Como $k \in [0, 200]$ e $\alpha \in \mathbb{Z}$, temos que $\alpha^2 \geq 0$, logo $\alpha - 1 \geq 0$, ou seja, $\alpha \geq 1$. Sendo k um número natural, temos que $\alpha^2(\alpha - 1)$ também deve ser um número natural. Para isso, devemos ter $\alpha \in \mathbb{N}$. Testando as possibilidades:

$$\alpha = 1 \Rightarrow 1^2(1 - 1) = 0 = k$$

$$\alpha = 2 \Rightarrow 2^2(2-1) = 4 = k$$
$$\alpha = 3 \Rightarrow 3^2(3-1) = 18 = k$$
$$\alpha = 4 \Rightarrow 4^2(4-1) = 48 = k$$
$$\alpha = 5 \Rightarrow 5^2(5-1) = 100 = k$$
$$\alpha = 6 \Rightarrow 6^2(6-1) = 180 = k$$
$$\alpha = 7 \Rightarrow 7^2(7-1) = 294 > 200$$

Portanto, as possíveis raízes inteiras são: $\alpha \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Devemos provar que essas raízes são as únicas inteiras.

Vamos analisar o polinômio quadrático e verificar se há outra raiz inteira.

$$p_k(x) = (x-\alpha)[x^2 + (\alpha-1)x + \alpha^2 - \alpha]$$
$$q(x) = x^2 + (\alpha-1)x + \alpha^2 - \alpha$$

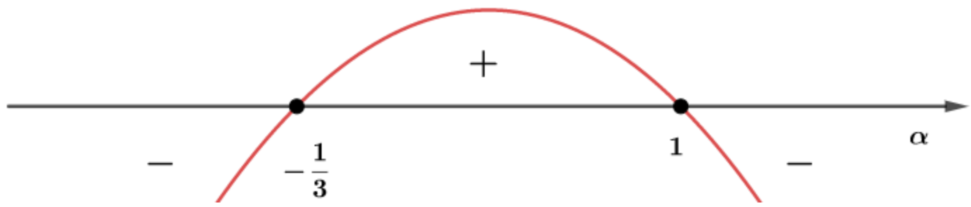
Analisando o discriminante:

$$\Delta = (\alpha-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\alpha^2 - \alpha) = \alpha^2 - 2\alpha + 1 - 4\alpha^2 + 4\alpha$$
$$\Delta = -3\alpha^2 + 2\alpha + 1$$

Encontrando as raízes, temos:

$$\alpha = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-3) \cdot 1}}{-6} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{-6} = 1\ ou - \frac{1}{3}$$

Fazendo o estudo do sinal para Δ:



Note que para $\alpha > 1$, o discriminante sempre será negativo e isso implica que as outras raízes são complexas. Vamos analisar a raiz $\alpha = 1$:

$$p_k(x) = (x-\alpha)[x^2 + (\alpha-1)x + \alpha^2 - \alpha] \Rightarrow p_0(x) = (x-1)x^2$$

Nesse caso, temos uma raiz 0 com multiplicidade 2 e uma raiz 1 e isso não satisfaz a condição do enunciado. Portanto, as únicas raízes são:

$$S = \{2; 3; 4; 5; 6\}$$

Gabarito: $\boldsymbol{S = \{2; 3; 4; 5; 6\}}$

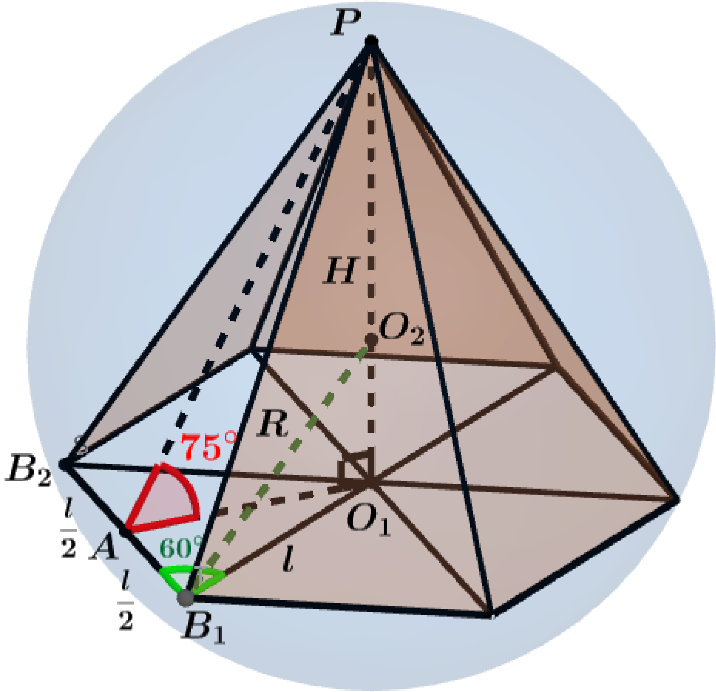
---

10. (ITA/2020)

Considere uma pirâmide reta P cuja base é um hexágono regular de lado l. As faces laterais dessa pirâmide formam um ângulo diedro de $75°$ com a base da própria pirâmide. Sabendo que P está inscrita em uma esfera, determine o raio dessa esfera.

Comentários

Espacialmente, temos os seguinte problema:



De acordo com a figura, pela tangente de 75° no triângulo AO_1P, vem:

$$tg(75°) = \frac{O_1P}{AO_1}$$

Em que:

$$AO_1 = O_1B_1 \cdot sen(60°)$$

$$AO_1 = l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Logo:

$$tg(75°) = \frac{H}{l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$tg(45° + 30) = \frac{H}{l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\frac{tg45° + tg30°}{1 - tg30° \cdot tg45°} = \frac{H}{l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{H}{l\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=\frac{H}{l\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$H=l\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\right)$$

$$H=l\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\left(3+\sqrt{3}\right)^2}{6}$$

$$H=l\cdot\frac{\sqrt{3}\left(12+2\cdot3\cdot\sqrt{3}\right)}{12}$$

$$H=l\cdot\left(\sqrt{3}+\frac{3}{2}\right)$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo $B_1O_1O_2$, vem:

$$R^2=(l)^2+(H-R)^2$$

$$R^2=l^2+H^2-2\cdot H\cdot R+R^2$$

$$0=l^2+l^2\cdot\left(\sqrt{3}+\frac{3}{2}\right)^2-2\cdot l\cdot\left(\sqrt{3}+\frac{3}{2}\right)\cdot R$$

$$R=l\cdot\left(\frac{1+\left(\sqrt{3}+\frac{3}{2}\right)^2}{2\sqrt{3}+3}\right)$$

$$R=l\cdot\left(\frac{1+3+3\cdot\sqrt{3}+\frac{9}{4}}{2\sqrt{3}+3}\right)$$

$$R=\frac{l}{4}\cdot\left(\frac{25+12\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+3}\right)$$

$$R=\frac{l}{4}\cdot\left(\frac{25+12\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+3}\right)\cdot\frac{\left(2\sqrt{3}-3\right)}{\left(2\sqrt{3}-3\right)}$$

$$\boxed{R=l\cdot\left(\frac{14\sqrt{3}-3}{12}\right)}$$

Gabarito: $\boldsymbol{R=l\cdot\left(\frac{14\sqrt{3}-3}{12}\right)}$
